

**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD MATEMÁTICAS II DE ANDALUCÍA  
CURSO 1998-1999.**

**Opción A**

**Ejercicio 1, Opción A, Modelo 1 de 1999.**

Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x \cdot \text{sen}(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

(a) [1 punto] Estudia la derivabilidad de  $f$ .

(b) [1'5 puntos] Calcula  $\int_{-1}^{\pi/2} 2f(x)dx$

**Solución**

(a)

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x \cdot \text{sen}(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}; \quad f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ \text{sen}(x) + x \cos(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Veamos si existe  $f'(0)$ , para lo cual tiene que darse  $f'(0^+) = f'(0^-)$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\text{sen}(x) + x \cos(x)) = 0$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1) = 1$$

Como  $f'(0^+) \neq f'(0^-)$ , no existe  $f'(0)$ .

(b)

Para calcular  $\int_{-1}^{\pi/2} 2f(x)dx$ , realizamos primero la integral por partes

$\int x \text{sen}(x) dx$ , para lo cual tomamos  $u = x$ ,  $dv = \text{sen}(x)dx$ , de donde  $du = dx$  y  $v = \int \text{sen}(x) dx = -\cos(x)$ , luego  $\int x \text{sen}(x) dx = x(-\cos(x)) - \int -\cos(x) dx = -x \cos(x) + \text{sen}(x)$

$$\int_{-1}^{\pi/2} 2f(x)dx = \int_{-1}^0 2f(x)dx + \int_0^{\pi/2} 2f(x)dx = \int_{-1}^0 2x dx + \int_0^{\pi/2} 2x \text{sen}(x) dx = \left[ \frac{2x^2}{2} \right]_{-1}^0 + 2[-x \cos(x) + \text{sen}(x)]_0^{\pi/2} =$$

$$= [(0) - (1)] + 2.[((-\pi/2) \cdot 0 + 1) - (0+0)] = -1+2 = 1$$

**Ejercicio 2, Opción A, Modelo 1 de 1999.**

Sea  $k$  un número real y sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = \cos(x) + kx$

(a) [1'25 puntos] Determina todos los valores de  $k$  para los que la función anterior es creciente en todo su dominio.

(b) [1'25 puntos] Para  $k = 1$  halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función  $f$  en el punto de abscisa  $x = 0$ .

**Solución**

(a)

La función  $f(x)$  es creciente si y solo si  $f'(x) > 0$

$$f(x) = \cos(x) + kx$$

$f'(x) = -\text{sen}(x) + k \geq 0$ , es decir  $\text{sen}(x) \leq k$ . Como  $\text{sen}(x) \in [-1,1]$ , tomando  $k \geq 1$  la función  $f(x)$  es creciente pues  $\text{sen}(x) \leq k$  (con  $k \geq 1$ )

(b)

Si  $k = 1$ ,  $f(x) = \cos(x) + x$ ,  $f'(x) = -\text{sen}(x) + 1$ .

La ecuación de la recta tangente en  $x = 0$  es  $y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$

$f(0) = \cos(0) + 0 = 1$ ;  $f'(0) = -\text{sen}(0) + 1 = 1$ , luego la recta tangente es  $y = x + 1$

**Ejercicio 3, Opción A, Modelo 1 de 1999.**

Sea  $\Pi$  el plano que pasa por los puntos  $M = (1,0,0)$ ,  $B = (0,1,1)$  y  $C = (1, 1,1)$ . Sea  $A$  el punto  $(1, 2, 3)$  y sea  $B'$  el simétrico de  $A$  respecto del plano  $\pi$

(a) [1'5 puntos] Halla la recta que pasa por  $A$  y por el punto medio del segmento  $AB'$ .

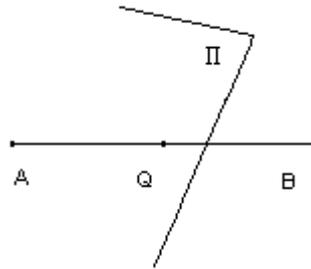
(b) [1 punto] Halla la recta paralela a la anterior que pasa por el punto  $(2, 2, 2)$

**Solución**

(a)

Calculamos el plano  $\pi$  que pasa por los puntos  $M$ ,  $B$  y  $C$  para lo cual tomamos como punto el  $M=(1,0,0)$ , y como vectores paralelos  $\mathbf{v} = \mathbf{MB} = (-1,1,1)$  y  $\mathbf{w} = \mathbf{MC} = (0,1,1)$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)(0) - (y-0)(-1) + (z-0)(-1) = y - z = 0$$



Para calcular el simétrico de  $A(1,2,3)$  respecto del plano  $\pi$ , calculamos la recta  $r$  perpendicular a  $\pi$  por el punto  $A$ , y hallamos  $Q$  como intersección del plano  $\pi$  con la recta  $r$  tiene como punto  $A(1,2,3)$  y como vector director  $\mathbf{w} = \mathbf{n} = (0,1,-1)$  el normal del plano  $\Pi$ . Su ecuación vectorial es

$$r \equiv (x,y,z) = (1, 2+\lambda, 3-\lambda)$$

$$Q = r \cap \pi$$

$$(2+\lambda) - (3-\lambda) = 0, \text{ operando sale } \lambda = 1/2, \text{ y el punto } Q \text{ es}$$

$$Q(1, 2+1/2, 3-1/2) = Q(1, 5/2, 5/2)$$

El punto  $Q(1, 5/2, 5/2)$  es el punto medio del segmento  $AB$ , siendo  $B$  el punto simétrico buscado, luego  $(1, 5/2, 5/2) = [(1+x)/2, (y+2)/2, (z+3)/3]$ , de donde  $x = 1, y = 3$  y  $z = 2$

El simétrico es  $B(1,3,2)$

La recta que me piden es la  $r$  que ya la he calculado  $r \equiv (x,y,z) = (1, 2+\lambda, 3-\lambda)$

Un vector directo suyo es  $\mathbf{v} = (0,1,-1)$

(b)

La recta  $s$  paralela a la anterior y que pasa por el punto  $(2,2,2)$ , tiene como vector director el  $\mathbf{v}$ , por tanto su ecuación es

$$s \equiv (x,y,z) = (2, 2+\lambda, 2-\lambda)$$

#### Ejercicio 4, Opción A, Modelo 1 de 1999.

[2'5 puntos] Sea  $A$  la matriz dada por  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & a & b \\ c & -a & d \end{pmatrix}$ . Halla  $a, b, c$  y  $d$  sabiendo que:

- El vector cuyas coordenadas son las que aparecen en la primera columna de  $A$  es ortogonal al vector  $(1, -1, 1)$
- El producto vectorial del vector cuyas coordenadas son las de la tercera columna de  $A$  por el vector  $(1, 0, 1)$  es el vector  $(-2, 3, 2)$
- El rango de la matriz  $A$  es 2.

#### Solución

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & a & b \\ c & -a & d \end{pmatrix}$$

Como  $(1,2,c)$  es ortogonal a  $(1,-1,1)$  su producto escalar es cero y obtenemos  $1 - 2 + c = 0$ , de donde  $c = 1$

(b)

Como el producto vectorial de  $(-7,b,d)$  por el vector  $(1,0,1)$  es  $(-2,3,2)$  tenemos

$$(-2,3,2) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -7 & b & d \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(b) - \mathbf{j}(-7-d) + \mathbf{k}(-b) = (b, 7+d, -b) \text{ de donde igualando obtenemos } b = -2 \text{ y } d = -4$$

(c)

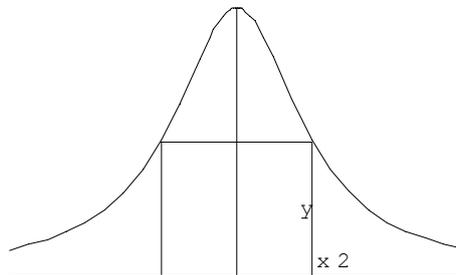
Como el rango( $A$ ) = 2 su determinante es cero, luego

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & a & -2 \\ 1 & -a & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & a-6 & 12 \\ 0 & -a-3 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot [(3a-18) + (12a+36)] = 15a + 18 = 0, \text{ de donde } a = -18/15$$

**Opción B**

**Ejercicio 1 de la opción B del modelo 1 de 1999.**

[2'5 puntos] De entre todos los rectángulos inscritos, como indica la figura, entre la gráfica de la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 1/(1 + x^2)$  y el eje OX, halla el de mayor área.



**Solución**

La función a maximizar es  $A = x.y$ , donde  $x$  es la base del rectángulo e  $y$  su altura es y que es

$$f(x/2) = [ 1 / ( 1 + (1/2)^2 ) ] = 4 / ( 4 + x^2 )$$

Luego la función es  $A = x.y = 4x / ( 4 + x^2 )$

$$A' = [ 4(4+x^2) - 4x(2x) ] / [ ( 4 + x^2 )^2 ] = ( 16-4x^2 ) / ( 4+x^2 )^2 .$$

$$A' = 0, \text{ nos da } 16-4x^2 = 0, \text{ de donde } x = \pm 2$$

Se calcula  $A''$  y nos sale

$$A'' = [ 4x(4+x^2)(3x^2-24) ] / ( 4+x^2 )^4 . \text{ y sustituyendo } x = 2 \text{ y } x = -2., \text{ vemos cual es el máximo y el mínimo}$$

Como  $A''(2) < 0$ ,  $x = 2$  es máximo. En este caso  $x = 2$ , e  $y = 4 / ( 4 + x^2 ) = 4 / ( 4+4 ) = 1/2$ , es decir el rectángulo tienen de base  $x = 2$ , y de altura  $y = 1/2$

Como  $A''(-2) > 0$ , en  $x = -2$  hay un mínimo

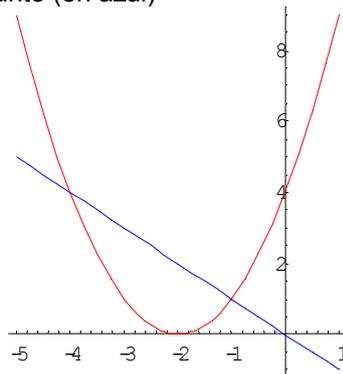
**Ejercicio 2 de la opción B del modelo 1 de 1999.**

[2'5 puntos] Dibuja y calcula el área del recinto limitado por la recta  $y + x = 0$  y la curva de ecuación  $y = x^2 + 4x + 4$ .

**Solución**

$y = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ , luego es una parábola igual que  $x^2$  pero desplazada dos unidades hacia la izquierda en abscisas (en rojo)

$y = -x$  es la bisectriz del 2º y 4º cuadrante (en azul)



Para calcular el área encerrada en el recinto calculamos los puntos donde coinciden, es decir las soluciones de  $x^2 + 4x + 4 = -x$ , es decir  $x^2 + 5x + 4 = 0$ . Sus soluciones son  $x = -1$  y  $x = -4$

$$\text{Area} = \int_{-4}^{-1} (-x-x^2-4x-4)dx = \int_{-4}^{-1} (-x^2-5x-4)dx = \left[ \frac{-x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - 4x \right]_{-4}^{-1} =$$

$$= [ (1/3 - 5/2 + 4) - (4^3/3 - (5.16/2) + 16) ] = 9/2 \text{ u.a.}$$

**Ejercicio 3 de la opción B del modelo 1 de 1999.**

(a) [1'5 puntos] Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro  $b$

$$\begin{aligned} x + y + bz &= b^2 \\ -x + y + bz &= -3 \\ bx + y + bz &= 3b \end{aligned}$$

(b) [1 punto] Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado

### Solución

(a)

La matriz de los coeficientes A y la matriz ampliada A\* son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & b \\ -1 & 1 & b \\ b & 1 & b \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & b & b^2 \\ -1 & 1 & b & -3 \\ b & 1 & b & 3b \end{pmatrix}$$

Como  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0$ , por lo menos  $\text{rango}(A) = 2$

Para que  $\text{rango}(A) = 3$ , tiene que ser  $|A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & b \\ -1 & 1 & b \\ b & 1 & b \end{vmatrix} = 0, \text{ por tener dos columnas proporcionales, luego } \text{rango}(A) = 2 \text{ sea cual sea el valor de "b".}$$

$$\text{En } A^* \text{ tenemos } \begin{vmatrix} 1 & 1 & b^2 \\ -1 & 1 & -3 \\ b & 1 & 3b \end{vmatrix} \begin{array}{l} F_2 - F_1 \\ F_2 - F_1 \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & b^2 \\ -2 & 0 & -3-b^2 \\ b-1 & 0 & 3b-b^2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{segunda} \\ \text{columna} \end{array} = 1(-1)(-6b+2b^2+(3+b^2)(b-1)) =$$

$= -1 \cdot (-6b+2b^2+3b-3+b^3-b^2) = -b^3 - b^2 + 3b + 3$ . Igualando a cero tenemos  $b^3 + b^2 - 3b - 3 = 0$ . Utilizamos Ruffini.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 1 & -3 & -3 \\ -1 & & -1 & 0 & 3 \\ \hline & 1 & 0 & -3 & 0 \end{array}$$

De donde tenemos  $b = -1$  y  $b^2 - 3 = 0$ , luego  $b = \pm\sqrt{3}$ .

Para  $b \neq -1$  y  $b \neq \pm\sqrt{3}$ ,  $\text{rango}(A^*) = 3$ . Por el Teorema de Rouchè, como  $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3$ , el sistema es incompatible y no tiene solución.

Si  $b = -1$  y  $b = \pm\sqrt{3}$ ,  $\text{rango}(A^*) = 2$ . Por el Teorema de Rouchè, como  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 < \text{número de incógnitas}$ , el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.

Lo resolvemos en este caso. Como el rango es 2 tomamos solo dos ecuaciones, las dos primeras que son con las que formamos el menor de orden 2 distinto de cero, y dos incógnitas principales.

Para no repetir 3 veces lo mismo dejamos "b" tal cual y se sustituye respectivamente por  $-1$ ,  $-\sqrt{3}$  y  $+\sqrt{3}$ .

$$x + y + bz = b^2$$

$-x + y + bz = -3$ . Tomamos  $z = \lambda \in \mathbb{R}$ , y sumamos ambas ecuaciones:

$$2y + 2b\lambda = -3 + b^2 \text{ de donde } y = (-3+b^2)/2 - b\lambda. \text{ Entrando en la primera tenemos:}$$

$$x + ((-3+b^2)/2 - b\lambda) + b\lambda = b^2, \text{ de donde } x = b^2 - (-3+b^2)/2 = b^2/2 + 3/2$$

**Solución del sistema  $(x,y,z) = (b^2/2 + 3/2, (-3+b^2)/2 - b\lambda, \lambda)$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$  y b igual a  $-1, -\sqrt{3}$  o  $+\sqrt{3}$ , es decir:**

**Si  $b = -1$  solución  $(x,y,z) = (2, -2 + \lambda, \lambda)$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$**

**Si  $b = -\sqrt{3}$  solución  $(x,y,z) = (3, +\sqrt{3}\lambda, \lambda)$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$**

**Si  $b = \sqrt{3}$  solución  $(x,y,z) = (3, -\sqrt{3}\lambda, \lambda)$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$**

### Ejercicio 4 de la opción B del modelo 1 de 1999.

Un objeto se mueve en el espacio siguiendo una línea recta cuya dirección viene dada por el vector  $\mathbf{v} = (1, 2, -1)$ . En su movimiento dicho objeto pasa por el punto  $A = (2, 1, 2)$

(a) [1 punto] Calcula los puntos de corte de la trayectoria del objeto con los planos coordenados.

(b) [0'75 puntos] Calcula la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a dicha trayectoria.

(c) [0'75 puntos] ¿Cuál es el ángulo que forma la trayectoria del objeto con el plano XOY.

### Solución

(a)

La ecuación de la recta r en vectorial es  $r \equiv (x,y,z) = (2+\lambda, 1+2\lambda, 2-\lambda)$

La ecuación del plano coordenado XOY es  $z = 0$ , de donde  $0 = 2 - \lambda$ , obtenemos  $\lambda = 2$  y el punto de corte de la recta con dicho plano es  $(4,5,0)$

La ecuación del plano coordenado XOZ es  $y = 0$ , de donde  $0 = 1 + 2\lambda$ , obtenemos  $\lambda = -1/2$  y el punto de corte de la recta con dicho plano es  $(3/2, 0, 3/2)$

La ecuación del plano coordenado ZOY es  $x = 0$ , de donde  $0 = 2 + \lambda$ , obtenemos  $\lambda = -2$  y el punto de corte de la recta con dicho plano es  $(0, -3, 4)$

(b)

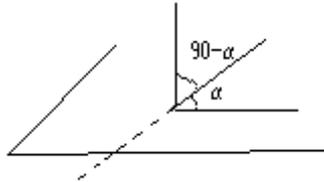
El plano  $\pi$  perpendicular a  $r$  que pasa por  $(0,0,0)$  tiene como vector normal  $\mathbf{n} = \mathbf{v} = (1,2,-1)$  el director de la recta, luego su ecuación es

$$\pi \equiv 1 \cdot (x-0) + 2(y-0) - 1(z-0) = x - 2y - z = 0$$

(b)

El plano XOY tiene de ecuación  $z = 0$ , por tanto su vector normal es  $\mathbf{n}_z = (0,0,1)$

El vector director de la recta es  $\mathbf{v} = (1,2,-1)$ , por tanto el ángulo que forma la recta con el plano es



$$\cos(90 - \alpha) = \sin(\alpha) = |(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_z) / (|\mathbf{v}| |\mathbf{n}_z|)| = |-1| / \sqrt{6}, \text{ por tanto } \alpha = \arcsin(1 / \sqrt{6}) = 24^\circ 5' 41,4''$$