

**Ejercicio 1 de la opción A del modelo 2 de 1999.**

Considera las funciones  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por  $f(x) = x^2 + 3x + 2$  y  $g(x) = -x^2 - 3x + 10$

(a) [1 punto] Representa gráficamente ambas funciones.

(b) [1'5 puntos] Halla el área de la región del plano que está formada por todos los puntos  $(x,y)$  que cumplen  $f(x) \leq y \leq g(x)$

**Solución**

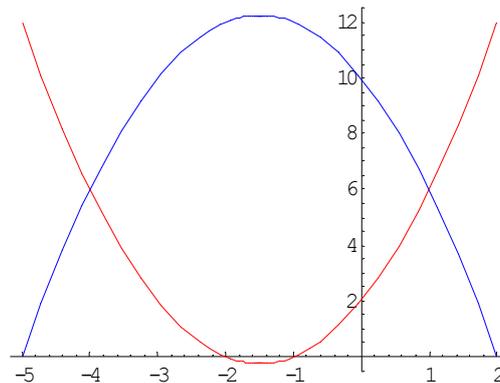
(a)

Las funciones  $f(x) = x^2 + 3x + 2$  y  $g(x) = -x^2 - 3x + 10$  son parábolas, por tanto con sus vértices prácticamente podemos dibujarlas sabiendo que  $f$  tiene las ramas hacia arriba y  $g$  hacia abajo

La abcisa del vértice es la solución de  $f' = 0$  y de  $g' = 0$ , pues son extremos relativos.

El vértice de  $f$  es  $(-3/2, -1/4)$  y el vértice de  $g$  es  $(-3/2, 49/4)$

Las graficas son



(a)

Nos están pidiendo el área encerrada por las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  para lo cual tenemos que calcular los puntos donde coinciden, es decir las soluciones de la ecuación  $f(x) = g(x)$ .

$x^2 + 3x + 2 = -x^2 - 3x + 10$ , es decir  $2x^2 + 6x - 8 = 0$ . Sus soluciones son  $x = -4$  y  $x = 1$ . Luego

$$\text{Area} = \int_{-4}^1 (g(x) - f(x)) dx = \int_{-4}^1 (-2x^2 - 6x + 8) dx = \left[ -\frac{2x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 8x \right]_{-4}^1 =$$

$$= \left[ -\frac{2}{3} - 3 + 8 \right] - \left[ -\frac{2 \cdot (-4)^3}{3} - 3 \cdot 16 - 32 \right] = -\frac{2}{3} + 5 - \frac{128}{3} + 80 = \frac{125}{3} \text{ u. a.}$$

**Ejercicio 2 de la opción A del modelo 2 de 1999.**

[2'5 puntos] Calcula las asíntotas de la gráfica de la función  $f$  definida para  $x \neq -1$  por  $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1}$ , y estudia la posición de dicha gráfica con respecto a las asíntotas

**Solución**

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1}$$

La recta  $x = -1$  es una asíntota vertical de  $f(x)$  porque

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[ \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1} \right] = -1 / 0^+ = -\infty$$

$$\text{Análogamente } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -1 / 0^- = +\infty$$

Y ya tenemos la posición de la gráfica respecto a la asíntota vertical.

Como en la función  $f(x)$  el numerador es un grado más que en el denominador, tenemos una asíntota oblicua de la forma  $y = mx + n$  (es la misma en  $+\infty$  y en  $-\infty$ ) con

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) / x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^2 + 3x + 1}{x \cdot (x + 1)} \right] = 1$$

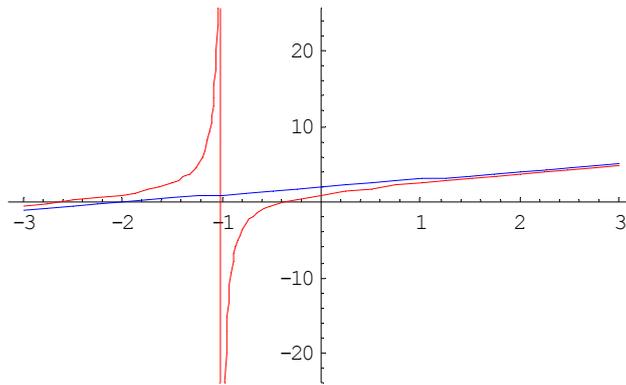
$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{2x + 1}{x + 1} \right] = 2$$

Luego la asíntota oblicua es  $y = mx + n = x + 2$

Como  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (x + 2)] = 0^-$ , la gráfica está por debajo en  $+\infty$

Como  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 2)] = 0^+$ , la gráfica está por encima en  $-\infty$

Aunque no la piden la gráfica es



Donde la asíntota oblicua está en azul

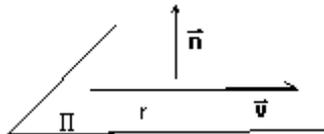
**Ejercicio 3 de la opción A del modelo 2 de 1999.**

Considera el plano  $\Pi$  y la recta  $r$  dados por  $\Pi \equiv ax + 2y - 4z + b = 0$  y  $r \equiv \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{1}$

- (a) [1'5 puntos] Halla los valores de  $a$  y  $b$  para los que  $r$  está contenida en  $\Pi$ .
- (b) [1 punto] ¿Existe algún valor de  $a$  y algún valor de  $b$  para los que la recta  $r$  es perpendicular al plano  $\Pi$ .

**Solución**

(a)



$$\Pi \equiv ax + 2y - 4z + b = 0 \quad \text{y} \quad r \equiv \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{1}$$

Un vector normal de  $\Pi$  es  $\mathbf{n} = (a, 2, -4)$

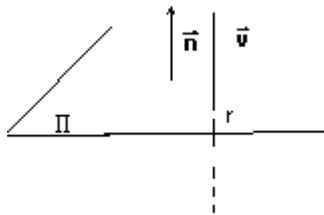
Un punto de la recta  $r$  es  $A(3, 1, 3)$ , y un vector director es  $\mathbf{v} = (4, -4, 1)$

Como la recta  $r$  está en el plano  $\Pi$ , los vectores  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{n}$  son perpendiculares y su producto escalar es cero, luego

$$(a, 2, -4) \cdot (4, -4, 1) = 0 = 4a - 8 - 4 = 0, \text{ de donde } a = 3$$

Como la recta  $r$  está en el plano  $\Pi$ ,  $A \in \Pi$ , es decir  $3(3) + 2 - 12 + b = 0$ , de donde  $b = 1$

(b)



Para que el plano  $\Pi$  y la recta  $r$  sean perpendiculares sus vectores normal y director tienen que ser dependientes, es decir  $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{n}$ , es decir sus coordenadas tienen que ser proporcionales

$$a/4 = 2/-4 = -4/1$$

pero como  $2/-4 \neq -4/1$ , no existe ningún punto  $a$  ni  $b$  para que sean perpendiculares el plano y la recta.

**Ejercicio 4 de la opción A del modelo 2 de 1999.**

Una persona trata de adivinar, mediante ciertas pistas, el coste de tres productos A, B y C que un amigo suyo ha comprado.

Pista 1: Si compro una unidad de A, dos de B y una de C me gasto 900 ptas.

Pista 2: Si compro  $m$  unidades de A,  $m + 3$  de B y 3 de C me gasto 2950 ptas.

- (a) [1 punto] ¿Hay algún valor de  $m$  para el que estas dos pistas no son compatibles?
- (b) [1 puntos] Si en la Pista 2 se toma  $m = 4$ , ¿es posible saber el coste de cada uno de los productos?
- (c) [2'5 puntos] Pista 3. el amigo le dice finalmente que el producto C vale 5 veces lo que vale el producto A y que en la Pista 2 se tiene  $m = 4$ . ¿Cuánto valen A, B y C?

**Solución**

(a)

$$A + 2B + C = 900$$

$$mA + (m+3)B + 3C = 2950$$

La matriz de los coeficientes  $M$  y la ampliada  $M^*$  son

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ m & m+3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 900 \\ m & m+3 & 3 & 2950 \end{pmatrix}$$

De la matriz  $M^*$ , tenemos el menor  $\begin{vmatrix} 1 & 900 \\ 3 & 2950 \end{vmatrix} \neq 0$ , por tanto  $\text{rango}(M^*) = 2$

Para que el sistema sea incompatible tiene que ser  $\text{rango}(M) = 1$ , es decir

$$0 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ m+3 & 3 \end{vmatrix} = 6 - m - 3, \text{ de donde } m = 3$$

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & 3 \end{vmatrix} = 3 - m, \text{ de donde } m = 3$$

Luego tomando  $m = 3$ , el sistema es incompatible.

(b)

Si  $m = 4$ , tenemos

$$A + 2B + C = 900$$

$$4A + 7B + 3C = 2950$$

Son dos ecuaciones con tres incógnitas y  $\text{rango}(M) = \text{rango}(M^*) = 2$ , por tanto el sistema es compatible e indeterminado y depende de uno de ellos

(c)

Con la última condición  $C = 5A$ , el sistema es

$$A + 2B + C = 900$$

$$4A + 7B + 3C = 2950$$

$C = 5A$ , resolviéndolo se obtiene  $A = 100$ ,  $B = 150$  y  $C = 500$ .

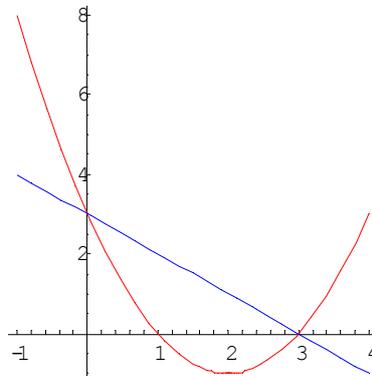
## Opción B

### Ejercicio 1 de la opción B del modelo 2 de 1999.

[2'5 puntos] Dibuja y halla el área de la región limitada por la recta  $y = -x + 3$  y la curva de ecuación  $y = x^2 - 4x + 3$ .

#### Solución

La parábola tiene las ramas hacia arriba y su vértice en el punto  $(2, -1)$  (su abcisa anula la primera derivada), por tanto las gráficas son



Para hallar el área de la región limitada por las dos funciones tenemos que calcular las soluciones de la ecuación  $x^2 - 4x + 3 = -x + 3$ , es decir  $x^2 - 3x = 0$ , de donde  $x = 0$  y  $x = 3$

$$\text{Area} = \int_0^3 [(-x+3) - (x^2-4x+3)] dx = \int_0^3 [-x^2+3x] dx = \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_0^3 = -\frac{3^3}{3} + \frac{3 \cdot 9}{2} = 9/2 \text{ u.a.}$$

### Ejercicio 2 de la opción B del modelo 2 de 1999.

Una partícula se desplaza a lo largo de la curva de ecuación  $y = f(x)$  siendo  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(a) [1 punto] ¿Hay algún punto en la trayectoria de la partícula en el que dicha curva no admite recta tangente?

(b) [1 punto] Determina las coordenadas del punto de la trayectoria en el que se alcanza la máxima altura.

(c) [0'5 puntos] ¿A que recta se aproxima la trayectoria cuando  $x \rightarrow \infty$ ? Justifica la respuesta.

#### Solución

(a)

Si en un punto no existe la derivada en dicho punto no existe recta tangente. Veamos si existe  $f'(0)$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} + xe^{-x}(-1) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Existe  $f'(0)$  si y solo si  $f'(0^+) = f'(0^-)$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [e^{-x}(1-x)] = e^0(1-0) = 1$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [0] = 0$$

Como  $f'(0^+) \neq f'(0^-)$ , no existe  $f'(0)$ , por tanto en  $x = 0$  no existe recta tangente.

(b)

El máximo de  $f(x)$  es la solución de  $f'(x) = 0$ , comprobando que en  $f''$  al sustituir de  $< 0$

Tomamos la rama  $f(x) = x.e^{-x}$

$f'(x) = e^{-x}(1-x) = 0$ , como la exponencial no es cero,  $1-x = 0$  de donde  $x = 1$ .

$$f''(x) = -e^{-x}(1-x) + e^{-x}(-1) = e^{-x}(x-2)$$

$$f''(1) = e^{-1}(1-2) = e^{-1}(-1) < 0, \text{ luego es un máximo}$$

El punto máximo es  $(1, 1.e^{-1}) = (1, 1/e)$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x.e^{-x}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x/e^x] = [\infty/\infty] =$$

Aplicándole la regla de L'Hôpital

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [1/e^x] = 1/\infty = 0, \text{ es decir se aproxima a la recta } y = 0$$

### Ejercicio 3 de la opción B del modelo 2 de 1999.

Considera el sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ 2x + 5y + 4z = -2 \\ x + 3y + m^2z = m \end{cases}$$

(a) [1 punto] Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro  $m$

(b) [1 punto] Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado

(b) [0'5 puntos] Razona para que valores de  $m$  tiene inversa la matriz de los coeficientes del sistema.

### Solución

(a)

Dado el sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ 2x + 5y + 4z = -2 \\ x + 3y + m^2z = m \end{cases}$$

su matriz de los coeficientes  $M$  y su matriz ampliada  $M^*$  son

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & m^2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & m^2 & m \end{pmatrix}$$

Como  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$ , por lo menos  $\text{rango}(M) = 2$

Para que  $\text{rango}(M) = 3$ , tiene que ser  $|M| \neq 0$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & m^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & m^2 - 3 \end{vmatrix} = m^2 - 3 + 2 = m^2 - 1.$$

$|M| \neq 0$  si y solo si  $m^2 - 1 \neq 0$ , es decir si  $m \neq \pm 1$

Si  $m = 1$ , tenemos que  $\text{rango}(M) = 2$ , y en  $M^*$  tenemos el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

por tanto  $\text{rango}(M^*) = 3$  y el sistema es incompatible.

Si  $m = -1$ , tenemos que  $\text{rango}(M) = 2$ , y en  $M^*$  tenemos el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

por tanto  $\text{rango}(M^*) = 2$  y el sistema es compatible.

(b)

Si  $m = -1$  el sistema es compatible e indeterminado, nos quedamos con las dos primeras ecuaciones

$$x + 2y + 3z = -1$$

$$2x + 5y + 4z = -2$$

Tomando  $z = \lambda$ , nos resulta

$$x + 2y = -1 - 3\lambda$$

$$2x + 5y = -2 - 4\lambda$$

Multiplicando por  $-2$  la primera y sumándole a la segunda

$y = 2\lambda$ , y sustituyendo en la primera queda  $x = -1 - 7\lambda$ , por tanto la solución del sistema es  $(x, y, z) = (-1 - 7\lambda, 2\lambda, \lambda)$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$

(c)

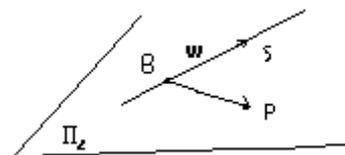
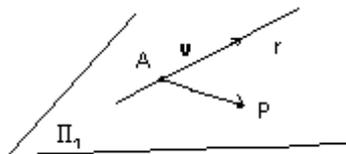
La matriz  $M$  tiene inversa si y solo si  $|M| \neq 0$ , es decir si  $m \neq \pm 1$

#### Ejercicio 4 de la opción B del modelo 2 de 1999.

[2'5 puntos] Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto  $P = (1, 0, 2)$  y corta a las rectas  $r$  y  $s$  dadas por:

$$r \equiv \frac{x}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1} \quad s \equiv \begin{cases} 2x + 6y + 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

**Solución**



Construimos la recta pedida como intersección de dos planos  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$ , que contienen respectivamente a la recta  $r$  y el punto  $P$ , y a la recta  $s$  y al punto  $P$

De la recta  $r$  tomamos un punto el  $A(0, -2, 0)$  y el vector  $\mathbf{v} = (3, 1, 1)$ . Para el plano  $\Pi_1$ , necesitamos también el vector  $\mathbf{AP} = (1, 2, 2)$

$$\Pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)(-1) - (y)(2) + (z-2)(5) = -x - 2y + 5z - 9 = 0$$

De la recta  $s$  tomamos un punto el  $B(2, 0, 2)$  y el vector  $\mathbf{w} = (2, 6, 0) \times (0, 1, 2) = (12, -4, 2)$ . Para el plano  $\Pi_2$ , necesitamos también el vector  $\mathbf{BP} = (2, 0, 2)$

$$\Pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ 12 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1)(-8) - (y)(24-4) + (z-2)(8) = -8x - 20y + 8z - 8 = 0$$

La recta pedida es

$$-x - 2y + 5z - 9 = 0$$

$$-8x - 20y + 8z - 8 = 0$$