

Ejercicio 1 de la opción A del modelo 2 de 1999.

Considera las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2 + 3x + 2$ y $g(x) = -x^2 - 3x + 10$

(a) [1 punto] Representa gráficamente ambas funciones.

(b) [1'5 puntos] Halla el área de la región del plano que está formada por todos los puntos (x,y) que cumplen $f(x) \leq y \leq g(x)$

Solución

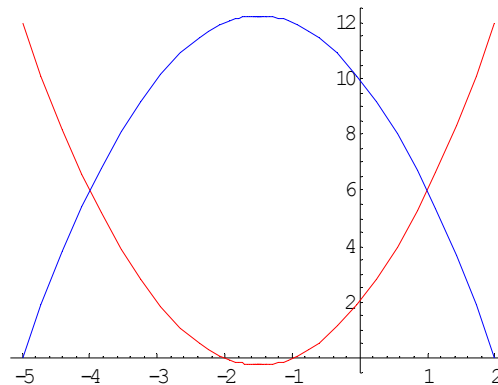
(a)

Las funciones $f(x) = x^2 + 3x + 2$ y $g(x) = -x^2 - 3x + 10$ son parábolas, por tanto con sus vértices prácticamente podemos dibujarlas sabiendo que f tiene las ramas hacia arriba y g hacia abajo

La abcisa del vértice es la solución de $f' = 0$ y de $g' = 0$, pues son extremos relativos.

El vértice de f es $(-3/2, -1/4)$ y el vértice de g es $(-3/2, 49/4)$

Las graficas son



(a)

Nos están pidiendo el área encerrada por las funciones $f(x)$ y $g(x)$ para lo cual tenemos que calcular los puntos donde coinciden, es decir las soluciones de la ecuación $f(x) = g(x)$.

$x^2 + 3x + 2 = -x^2 - 3x + 10$, es decir $2x^2 + 6x - 8 = 0$. Sus soluciones son $x = -4$ y $x = 1$. Luego

$$\text{Area} = \int_{-4}^1 (g(x) - f(x)) dx = \int_{-4}^1 (-2x^2 - 6x + 8) dx = \left[-\frac{2x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 8x \right]_{-4}^1 =$$

$$= \left[-\frac{2}{3} - 3 + 8 \right] - \left[-\frac{2 \cdot (-4)^3}{3} - 3 \cdot 16 - 32 \right] = -\frac{2}{3} + 5 - \frac{128}{3} + 80 = \frac{125}{3} \text{ u. a.}$$

Ejercicio 2 de la opción A del modelo 2 de 1999.

[2'5 puntos] Calcula las asíntotas de la gráfica de la función f definida para $x \neq -1$ por $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1}$, y estudia la posición de dicha gráfica con respecto a las asíntotas

Solución

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1}$$

La recta $x = -1$ es una asíntota vertical de $f(x)$ porque

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[\frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1} \right] = -1 / 0^+ = -\infty$$

$$\text{Análogamente } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -1 / 0^- = +\infty$$

Y ya tenemos la posición de la gráfica respecto a la asíntota vertical.

Como en la función $f(x)$ el numerador es un grado más que en el denominador, tenemos una asíntota oblicua de la forma $y = mx + n$ (es la misma en $+\infty$ y en $-\infty$) con

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) / x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 + 3x + 1}{x \cdot (x + 1)} \right] = 1$$

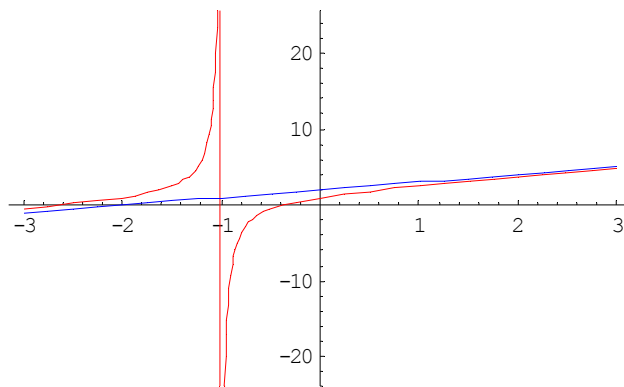
$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{2x + 1}{x + 1} \right] = 2$$

Luego la asíntota oblicua es $y = mx + n = x + 2$

Como $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (x + 2)] = 0^-$, la gráfica está por debajo en $+\infty$

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 2)] = 0^+$, la gráfica está por encima en $-\infty$

Aunque no la piden la gráfica es



Donde la asíntota oblicua está en azul

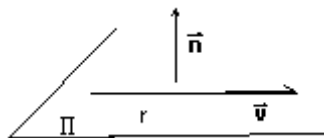
Ejercicio 3 de la opción A del modelo 2 de 1999.

Considera el plano Π y la recta r dados por $\Pi \equiv ax + 2y - 4z + b = 0$ y $r \equiv \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{1}$

- (a) [1'5 puntos] Halla los valores de a y b para los que r está contenida en Π .
- (b) [1 punto] ¿Existe algún valor de a y algún valor de b para los que la recta r es perpendicular al plano Π .

Solución

(a)



$$\Pi \equiv ax + 2y - 4z + b = 0 \quad \text{y} \quad r \equiv \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{1}$$

Un vector normal de Π es $\mathbf{n} = (a, 2, -4)$

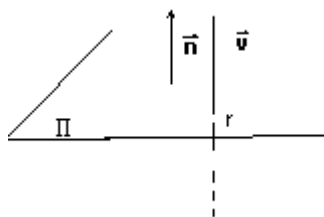
Un punto de la recta r es $A(3, 1, 3)$, y un vector director es $\mathbf{v} = (4, -4, 1)$

Como la recta r está en el plano Π , los vectores \mathbf{v} y \mathbf{n} son perpendiculares y su producto escalar es cero, luego

$$(a, 2, -4) \cdot (4, -4, 1) = 0 = 4a - 8 - 4 = 0, \text{ de donde } a = 3$$

Como la recta r está en el plano Π , $A \in \Pi$, es decir $3(3) + 2 - 12 + b = 0$, de donde $b = 1$

(b)



Para que el plano Π y la recta r sean perpendiculares sus vectores normal y director tienen que ser dependientes, es decir $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{n}$, es decir sus coordenadas tienen que ser proporcionales

$$a/4 = 2/-4 = -4/1$$

pero como $2/-4 \neq -4/1$, no existe ningún punto a ni b para que sean perpendiculares el plano y la recta.

Ejercicio 4 de la opción A del modelo 2 de 1999.

Una persona trata de adivinar, mediante ciertas pistas, el coste de tres productos A, B y C que un amigo suyo ha comprado.

Pista 1: Si compro una unidad de A, dos de B y una de C me gasto 900 ptas.

Pista 2: Si compro m unidades de A, $m + 3$ de B y 3 de C me gasto 2950 ptas.

- (a) [1 punto] ¿Hay algún valor de m para el que estas dos pistas no son compatibles?
- (b) [1 puntos] Si en la Pista 2 se toma $m = 4$, ¿es posible saber el coste de cada uno de los productos?
- (c) [2'5 puntos] Pista 3. el amigo le dice finalmente que el producto C vale 5 veces lo que vale el producto A y que en la Pista 2 se tiene $m = 4$. ¿Cuánto valen A, B y C?

Solución

(a)

$$A + 2B + C = 900$$

$$mA + (m+3)B + 3C = 2950$$

La matriz de los coeficientes M y la ampliada M^* son

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ m & m+3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 900 \\ m & m+3 & 3 & 2950 \end{pmatrix}$$

De la matriz M^* , tenemos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 900 \\ 3 & 2950 \end{vmatrix} \neq 0$, por tanto $\text{rango}(M^*) = 2$

Para que el sistema sea incompatible tiene que ser $\text{rango}(M) = 1$, es decir

$$0 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ m+3 & 3 \end{vmatrix} = 6 - m - 3, \text{ de donde } m = 3$$

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & 3 \end{vmatrix} = 3 - m, \text{ de donde } m = 3$$

Luego tomando $m = 3$, el sistema es incompatible.

(b)

Si $m = 4$, tenemos

$$A + 2B + C = 900$$

$$4A + 7B + 3C = 2950$$

Son dos ecuaciones con tres incógnitas y $\text{rango}(M) = \text{rango}(M^*) = 2$, por tanto el sistema es compatible e indeterminado y depende de uno de ellos

(c)

Con la última condición $C = 5A$, el sistema es

$$A + 2B + C = 900$$

$$4A + 7B + 3C = 2950$$

$C = 5A$, resolviéndolo se obtiene $A = 100$, $B = 150$ y $C = 500$.

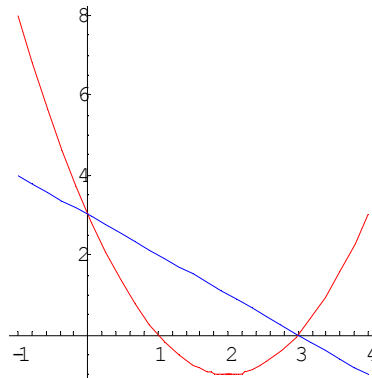
Opción B

Ejercicio 1 de la opción B del modelo 2 de 1999.

[2'5 puntos] Dibuja y halla el área de la región limitada por la recta $y = -x + 3$ y la curva de ecuación $y = x^2 - 4x + 3$.

Solución

La parábola tiene las ramas hacia arriba y su vértice en el punto $(2, -1)$ (su abcisa anula la primera derivada), por tanto las gráficas son



Para hallar el área de la región limitada por las dos funciones tenemos que calcular las soluciones de la ecuación $x^2 - 4x + 3 = -x + 3$, es decir $x^2 - 3x = 0$, de donde $x = 0$ y $x = 3$

$$\text{Area} = \int_0^3 [(-x+3) - (x^2-4x+3)] dx = \int_0^3 [-x^2+3x] dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_0^3 = -\frac{3^3}{3} + \frac{3 \cdot 9}{2} = 9/2 \text{ u.a.}$$

Ejercicio 2 de la opción B del modelo 2 de 1999.

Una partícula se desplaza a lo largo de la curva de ecuación $y = f(x)$ siendo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(a) [1 punto] ¿Hay algún punto en la trayectoria de la partícula en el que dicha curva no admite recta tangente?

(b) [1 punto] Determina las coordenadas del punto de la trayectoria en el que se alcanza la máxima altura.

(c) [0'5 puntos] ¿A que recta se aproxima la trayectoria cuando $x \rightarrow \infty$? Justifica la respuesta.

Solución

(a)

Si en un punto no existe la derivada en dicho punto no existe recta tangente. Veamos si existe $f'(0)$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} + xe^{-x}(-1) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Existe $f'(0)$ si y solo si $f'(0^+) = f'(0^-)$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [e^{-x}(1-x)] = e^0(1-0) = 1$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [0] = 0$$

Como $f'(0^+) \neq f'(0^-)$, no existe $f'(0)$, por tanto en $x = 0$ no existe recta tangente.

(b)

El máximo de $f(x)$ es la solución de $f'(x) = 0$, comprobando que en f'' al sustituir de < 0

Tomamos la rama $f(x) = x.e^{-x}$

$f'(x) = e^{-x}(1-x) = 0$, como la exponencial no es cero, $1-x = 0$ de donde $x = 1$.

$$f''(x) = -e^{-x}(1-x) + e^{-x}(-1) = e^{-x}(x-2)$$

$$f''(1) = e^{-1}(1-2) = e^{-1}(-1) < 0, \text{ luego es un máximo}$$

El punto máximo es $(1, 1.e^{-1}) = (1, 1/e)$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x.e^{-x}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x/e^x] = [\infty/\infty] =$$

Aplicándole la regla de L'Hôpital

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [1/e^x] = 1/\infty = 0, \text{ es decir se aproxima a la recta } y = 0$$

Ejercicio 3 de la opción B del modelo 2 de 1999.

Considera el sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ 2x + 5y + 4z = -2 \\ x + 3y + m^2z = m \end{cases}$$

(a) [1 punto] Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro m

(b) [1 punto] Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado

(b) [0'5 puntos] Razona para que valores de m tiene inversa la matriz de los coeficientes del sistema.

Solución

(a)

Dado el sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ 2x + 5y + 4z = -2 \\ x + 3y + m^2z = m \end{cases}$$

su matriz de los coeficientes M y su matriz ampliada M^* son

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & m^2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & m^2 & m \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$, por lo menos $\text{rango}(M) = 2$

Para que $\text{rango}(M) = 3$, tiene que ser $|M| \neq 0$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & m^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & m^2 - 3 \end{vmatrix} = m^2 - 3 + 2 = m^2 - 1.$$

$|M| \neq 0$ si y solo si $m^2 - 1 \neq 0$, es decir si $m \neq \pm 1$

Si $m = 1$, tenemos que $\text{rango}(M) = 2$, y en M^* tenemos el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

por tanto $\text{rango}(M^*) = 3$ y el sistema es incompatible.

Si $m = -1$, tenemos que $\text{rango}(M) = 2$, y en M^* tenemos el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

por tanto $\text{rango}(M^*) = 2$ y el sistema es compatible.

(b)

Si $m = -1$ el sistema es compatible e indeterminado, nos quedamos con las dos primeras ecuaciones

$$x + 2y + 3z = -1$$

$$2x + 5y + 4z = -2$$

Tomando $z = \lambda$, nos resulta

$$x + 2y = -1 - 3\lambda$$

$$2x + 5y = -2 - 4\lambda$$

Multiplicando por -2 la primera y sumándole a la segunda

$y = 2\lambda$, y sustituyendo en la primera queda $x = -1 - 7\lambda$, por tanto la solución del sistema es $(x,y,z) = (-1-7\lambda, 2\lambda, \lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

(c)

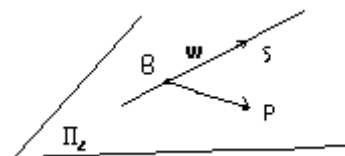
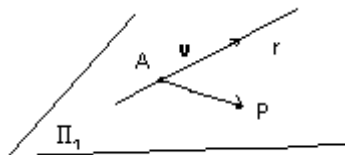
La matriz M tiene inversa si y solo si $|M| \neq 0$, es decir si $m \neq \pm 1$

Ejercicio 4 de la opción B del modelo 2 de 1999.

[2'5 puntos] Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P = (1, 0, 2)$ y corta a las rectas r y s dadas por:

$$r \equiv \frac{x}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1} \quad s \equiv \begin{cases} 2x + 6y + 2 = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

Solución



Construimos la recta pedida como intersección de dos planos Π_1 y Π_2 , que contienen respectivamente a la recta r y el punto P , y a la recta s y al punto P

De la recta r tomamos un punto el $A(0,-2,0)$ y el vector $\mathbf{v} = (3,1,1)$. Para el plano Π_1 , necesitamos también el vector $\mathbf{AP} = (1,2,2)$

$$\Pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)(-1) - (y)(2) + (z-2)(5) = -x - 2y + 5z - 9 = 0$$

De la recta s tomamos un punto el $B(2,0,2)$ y el vector $\mathbf{w} = (2,6,0) \times (0,1,2) = (12,-4,2)$. Para el plano Π_2 , necesitamos también el vector $\mathbf{BP} = (2,0,2)$

$$\Pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ 12 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1)(-8) - (y)(24-4) + (z-2)(8) = -8x - 20y + 8z - 8 = 0$$

La recta pedida es

$$-x - 2y + 5z - 9 = 0$$

$$-8x - 20y + 8z - 8 = 0$$