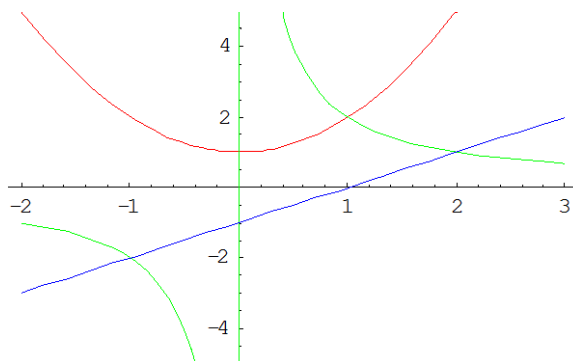


Ejercicio 1 de la opción A del modelo 1 de 2000.

- (a) [1 punto] Dibuja el recinto limitado por los semiejes positivos de coordenadas y las curvas $y = x^2 + 1$, $y = \frac{2}{x}$ e $y = x - 1$.
- (b) [1'5 puntos] Halla el área del recinto considerado en el apartado anterior.

Solución

(a)
 $y = x^2 + 1$ es un parábola igual que $y = x^2$, pero desplazada una unidad hacia arriba en ordenadas.
 $y = \frac{2}{x}$ es un hipérbola que pasa por (1,2) y (-1,-2)
 $y = x - 1$ es un recta igual que $y = x - 1$, pero desplazada una unidad hacia la derecha en abcisas
 Sus gráficas las tenemos en rojo, verde y azul



(b)
 Para determinar su área determinamos sus puntos de corte
 De $x^2 + 1 = 2/x$, tenemos $x^3 + x - 2 = 0$ y su solución es $x = 1$
 De $x^2 + 1 = x - 1$, tenemos $x^2 - x + 2 = 0$ que no tiene solución real
 De $2/x = x - 1$ tenemos $x^2 - x - 2 = 0$ y se obtienen como soluciones $x = -1$ y $x = 2$, en nuestro caso la que nos interesa es $x = 2$.

$$\text{Area} = \int_0^1 (x^2+1)dx + \int_1^2 (2/x - (x-1))dx = [x^3/3 + x]_0^1 + [2\ln|x| - x^2/2 + x]_1^2 = (1/3 + 1) + [(2\ln(2) - 2 + 2) - (2\ln(1) - 1/2 + 1)] = 5/6 + 2\ln(2) \text{ u.a.}$$

Ejercicio 2 de la opción A del modelo 1 de 2000.

[2'5 puntos] Calcula a y b sabiendo que la función: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} ax + 5x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{a}{x} + bx & \text{si } x > 2 \end{cases}$ sea derivable.

Solución

Como $f(x) = \begin{cases} ax + 5x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{a}{x} + bx & \text{si } x > 2 \end{cases}$ nos dicen que es derivable, también es continua en particular en $x = 2$, es decir $f(2^-) = f(2^+) = f(2)$.

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, para que sea continua en $x = 2$. Sustituyendo tenemos

$$2a + 20 = 2a + 20 = a/2 + 2b$$

Como $f(x)$ es derivable tenemos $f'(x) = \begin{cases} a + 10x & \text{si } x \leq 2 \\ -\frac{a}{x^2} + b & \text{si } x > 2 \end{cases}$, con lo cual concretando en $x = 2$ tenemos

$f'(2^-) = f'(2^+)$, es decir $a + 20 = -a/4 + b$.

Resolviendo el sistema $2a + 20 = a/2 + 2b$ con $a + 20 = -a/4 + b$ obtenemos $a = -20$ y $b = -5$.

Ejercicio 3 de la opción A del modelo 1 de 2000.

Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$, calcula los siguientes determinantes y enuncia las propiedades que utilices:

- (a) [1 punto] $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix}$. (b) [1'5 puntos] $\begin{vmatrix} a+2b & c & b \\ d+2e & f & e \\ g+2h & i & h \end{vmatrix}$

Solución

(a) Si un fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número se puede sacar factor común multiplicando al determinante

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & 5c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$$

(b) Si se cambian entre si dos columnas de un determinante el determinante cambia de signo, y a una columna se le puede sumar una combinación lineal de las otras columnas sin que el determinante cambie de valor

$$\begin{vmatrix} a+2b & c & b \\ d+2e & f & e \\ g+2h & i & h \end{vmatrix} = (\text{Cambio } 2^{\text{a}} \text{ columna por } 3^{\text{a}}) = - \begin{vmatrix} a+2b & b & c \\ d+2e & e & f \\ g+2h & h & i \end{vmatrix} = (a \text{ la } 1^{\text{a}} \text{ columna le sumo } 2^{\text{a}}x(-2)) =$$

$$= - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2.$$

Ejercicio 4 de la opción A del modelo 1 de 2000.

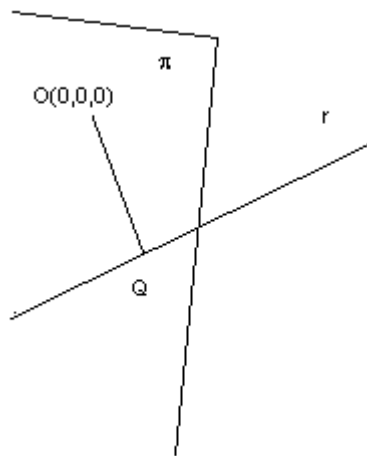
[2'5 puntos] Halla la distancia entre el origen de coordenadas y la recta intersección de los planos de ecuaciones respectivas $x+y+2z = 4$ y $2x-y+z = 2$.

Solución

Ponemos la recta $x+y+2z = 4$ y $2x-y+z = 2$, en paramétricas. Tomamos $z = \lambda$, con lo cual resolvemos el sistema $x+y = 4 - 2\lambda$ e $2x-y = 2 - \lambda$. Sus soluciones son $x = 2 - \lambda$ e $y = 2 - \lambda$, luego la recta es

$$r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Calculamos el plano π perpendicular (\perp) a la recta r que pasa por $O(0,0,0)$, su punto de corte Q con dicha recta y la distancia buscada es $d(O,Q)$



El plano π tiene como vector normal \mathbf{n} el vector director de la recta $\mathbf{v} = (-1, -1, 1)$

$$\pi \equiv (-1)(x-0) + (-1)(y-0) + (1)(z-0) = -x-y+z = 0$$

$Q = r \cap \pi$, para lo cual sustituimos la recta r en π

$$-(2 - \lambda) - (2 - \lambda) + (\lambda) = 0 \rightarrow 3\lambda - 4 = 0 \rightarrow \lambda = 4/3$$

El punto Q es $Q(2 - (4/3), 2 - (4/3), 4/3) = Q(2/3, 2/3, 4/3)$

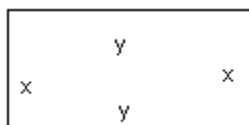
$$\overrightarrow{OQ} = (2/3 - 0, 2/3 - 0, 4/3 - 0) = ((2/3, 2/3, 4/3))$$

$$d(O,Q) = |\overrightarrow{OQ}| = \sqrt{4/9 + 4/9 + 16/9} = \sqrt{24/9} \text{ unidades de longitud (u.l.)}$$

Ejercicio 1 de la opción B del modelo 1 de 2000.

[2'5 puntos] De entre todos los rectángulos de 40 kilómetros de perímetro calcula las dimensiones del que tiene área máxima.

Solución



La función a optimizar es Área = $A = x \cdot y$

La relación entre las variables es $2x + 2y = 40$, luego $y = 20 - x$, de donde $A = x \cdot y = x \cdot (20 - x) = 20x - x^2$

Derivamos, igualamos a cero para obtener los posibles máximos o mínimos y comprobamos con la segunda derivad si es máximo o mínimo

$A' = 20 - 2x$; $A' = 0$; $20 - 2x = 0$ de donde $x = 10$ que es el posible máximo o mínimo

$A'' = -2 < 0$, por tanto es un máximo

Si $x = 10$, $y = 20 - 10 = 10$, es decir es un cuadrado de lado 10 kilómetros.

Ejercicio 2 de la opción B del modelo 1 de 2000.

(a) [1 punto] Dibuja el recinto limitado por la curva $y = \frac{9 - x^2}{4}$, la recta tangente a esta curva en el punto de abcisa $x = 1$

y el eje de abcisas.

(b) [1'5 puntos] Calcula el área del recinto considerado en el apartado anterior.

Solución

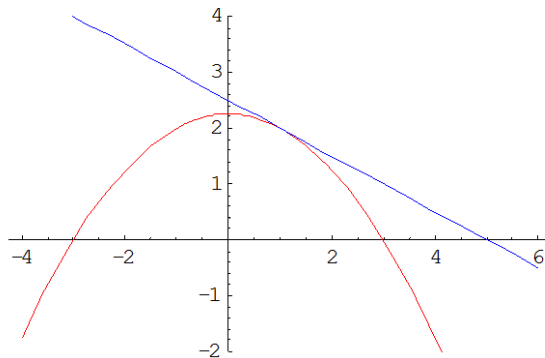
(a)

$y = \frac{9 - x^2}{4} = \frac{9}{4} - \left(\frac{x}{2}\right)^2$, es decir su gráfica es la de una parábola igual a la de $-x^2$, pero desplazada $9/4$ hacia arriba y un poco mas abierta.

La recta tangente en $x = 1$ es $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

$f(x) = \frac{9 - x^2}{4}$, derivando tenemos $f'(x) = -x/4$, por tanto $f(1) = 8/4 = 2$ y $f'(1) = -1/2$. sustituyendo tenemos que la recta tangente es $y - 2 = -1/2(x - 1)$. Operando resulta $y = -1/2x + 5/2$

Su gráfica es



Para determinar el área pedida tenemos que hallar el corte de la parábola con la recta resolviendo $\frac{9 - x^2}{4} = -1/2x + 5/2$, y

nos sale 1 pues es el punto de tangencia

También hay que determinar los puntos de corte de la recta y de la parábola con el eje de abcisas OX, de ecuación $y = 0$, resultándonos $x = 5$ para la recta, y $x = \pm 3$ para la parábola, del que solo nos vale el $x = 3$.

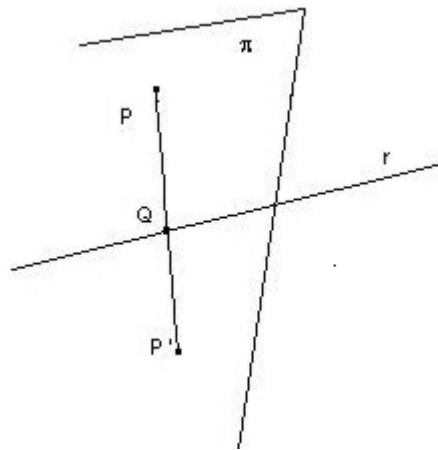
(b)

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_1^5 (-1/2x + 5/2)dx - \int_1^3 \left(\frac{9 - x^2}{4}\right)dx = \left[-x^2/4 + 5/2x\right]_1^5 - \left[9/4x - x^3/12\right]_1^3 = \\ &= [(-25/4 + 25/2) - (-1/4 + 5/2)] - [(27/4 - 27/12) - (9/4 - 1/12)] = 5/3 \text{ u.a.} \end{aligned}$$

Ejercicio 3 de la opción B del modelo 1 de 2000.

[2'5 puntos] Calcula las coordenadas del punto simétrico del (1,-3,7) respecto de la recta dada por las ecuaciones $x - 1$

$$= y + 3 = \frac{z - 4}{2}.$$

Solución

Ponemos la recta en paramétricas

$$\begin{aligned}x &= 1+\lambda \\y &= -3+\lambda \\z &= 4+2\lambda\end{aligned}$$

Calculamos el plano π perpendicular a la recta r por el punto $P(1,-3,7)$. El plano π tiene como vector normal \mathbf{n} el vector director de la recta $\mathbf{v} = (1,1,2)$

$$\pi \equiv (1)(x-1) + (1)(y+3) + (2)(z-7) = x+y+2z-12 = 0$$

Q es el punto de corte de la recta r con el plano π

$$(1+\lambda)+(-3+\lambda)+2(4+2\lambda) -12 = 6\lambda -6 = 0 \rightarrow \lambda = 1$$

Luego el punto Q es $Q(1+1, -3+1, 4+2) = Q(2, -2, 6)$

Q es el punto medio de P y de su simétrico P' , es decir

$$(2,-2,6) = \left(\frac{1+x}{2}, \frac{-3+y}{2}, \frac{7+z}{2} \right). \text{ Igualando miembro a miembro tenemos:}$$

$$2 = \frac{1+x}{2}, \quad -2 = \frac{-3+y}{2}, \quad 6 = \frac{7+z}{2}. \text{ De donde obtenemos } x = 3, \quad y = -1 \text{ y } z = 5, \text{ es decir el simétrico buscado es } P'(3,-1,5)$$

Ejercicio 4 de la opción B del modelo 1 de 2000.

Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \lambda x + 2y = 3 \\ -x + 2\lambda z = -1 \\ 3x - y - 7z = \lambda + 1 \end{cases}$$

(a) [1 punto] Halla todos los valores del parámetro λ para los que el sistema correspondiente tiene infinitas soluciones.

(b) [1 punto] Resuelve el sistema para los valores de λ en el apartado anterior.

(c) [0'5 puntos] Discute el sistema para los restantes valores de λ .

Solución

(a)

Sean A y A^* la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2\lambda \\ 3 & -1 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^* = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2\lambda & -1 \\ 3 & -1 & -7 & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

Si $|A| \neq 0$, el sistema tiene solución única

Si $|A| = 0$, el sistema no tiene solución única, y tendremos que verlo caso a caso según los valores de λ , y estudiar si los rangos de A y de A^* coinciden o no.

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2\lambda \\ 3 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 2\lambda^2 + 12\lambda - 14$$

Resolviendo $2\lambda^2 + 12\lambda - 14 = 0$ obtenemos $\lambda = 1$ y $\lambda = -7$

Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -7$, el sistema tiene solución única puesto que $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3$.

Si $\lambda = 1$. Tenemos $|A| = 0$, y como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, rango (A) = 2

En A^* , de $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$, tenemos rango(A^*) = 2

Por el Teorema de Rouché-Frobeniüs como rango(A) = rango(A^*) = 2, el sistema tiene infinitas soluciones.

Si $\lambda = -7$. Tenemos $|A| = 0$, y como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, rango (A) = 2

En A^* , de $\begin{vmatrix} -7 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -6 \end{vmatrix} \neq 0$, tenemos rango(A^*) = 3

Por el Teorema de Rouché-Frobeniüs como rango(A)=2 \neq rango(A^*)=3, el sistema no tiene solución y es incompatible.

(c) Ya hemos resuelto la discusión del sistema.

(b) Si $\lambda = 1$, como rango(A) = rango(A^*) = 2, nos quedamos solo con las dos primeras ecuaciones:

$x+2y = 3$; $-x+2z = -1$. Para resolverlo tomamos $z = \mu$, y nos resulta $x=1+2\mu$ e $y=1-\mu$, por tanto las infinitas soluciones son $(x,y,z) = (1+2\mu, 1-\mu, \mu)$ con $\mu \in \mathfrak{R}$.