OPCIÓN A

Ejercicio 1 de la Opción A de sobrantes 3 de 2001.

[2'5 puntos] Calcula $\lim_{x\to 0} \dfrac{(e^x-1)\operatorname{sen}x}{x^3-x^2}$

Solución

$\lim_{x\to 0} \dfrac{(e^x-1)\operatorname{sen}x}{x^3-x^2}$ = (0/0) {Aplicamos L'Hôpital} = $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x\operatorname{sen}x+(e^x-1)\cos x}{3x^2-2x}$ = (0/0) =

= $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x\operatorname{sen}x+e^x\cos x+e^x\cos x+(e^x-1)(-\operatorname{sen}x)}{6x-2} = \dfrac{1\cdot 0+1\cdot 1+1\cdot 1+0\cdot 0}{0-2}$ = 2/-2 = - 1

Ejercicio 2 de la Opción A de sobrantes 3 de 2001.

Sea $f:\Re\to\Re$ la función definida por $f(x) = |x^2-1|$

(a) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de f

(b) [1 punto] Estudia la derivabilidad de f.

(c) [1 punto] Calcula $\int_0^2 f(x)\,dx$.

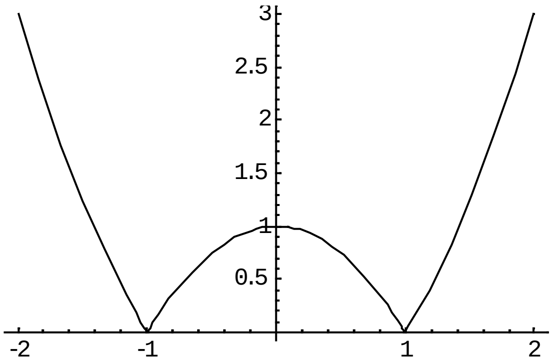
Solución

(a) $f(x) = |x^2-1| = \begin{cases} x^2-1 & si \quad x<-1 \\ -(x^2-1) & si \quad -1\le x<1. \\ x^2-1 & si \quad x\ge 1 \end{cases}$ $x^2 - 1 = 0$, de donde $x = \pm 1$

La gráfica de la parábola $x^2 - 1$ es la misma que la de la parábola x^2 pero desplazada una unidad hacia abajo en ordenadas.

La gráfica de $-(x^2 - 1)$ es simétrica de la de $x^2 - 1$ con respecto al eje OX

La gráfica de $|x^2 - 1|$ es



(b) $f(x) = |x^2-1| = \begin{cases} x^2-1 & si \quad x<-1 \\ -(x^2-1) & si \quad -1\le x<1. \\ x^2-1 & si \quad x\ge 1 \end{cases}$ $f'(x) = \begin{cases} 2x & si \quad x<-1 \\ -2x & si \quad -1<x<1. \\ 2x & si \quad x>1 \end{cases}$ Sólo nos falta estudiar las derivadas en x = 1 y x = -1

Veamos la derivada en x = - 1

$f'(-1^-) = \lim_{x\to(-1)^-} f'(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f'(x) = \lim_{x\to -1} (2x) = -2$

$f'(-1^+) = \lim_{x\to(-1)^+} f'(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f'(x) = \lim_{x\to -1} (-2x) = 2$. Como $f'(-1^-) \neq f'(-1^+)$, no existe $f'(-1)$

Veamos la derivada en x = 1

$f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f'(x) = \lim_{x\to 1} (-2x) = 2$

$f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f'(x) = \lim_{x\to 1} (2x) = -2$. Como $f'(1^-) \neq f'(1^+)$, no existe $f'(1)$

Luego f es derivable en $\Re$ - {- 1, 1}

(c) $\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 |x^2-1|\,dx + \int_1^2 |x^2-1|\,dx = \int_0^1 (-x^2+1)\,dx + \int_1^2 (x^2-1)\,dx =$

$= \left[\frac{-x^3}{3} + x\right]_0^1 + \left[\frac{-x^3}{3} + x\right]_1^2$ = [(-1/3 +1) –0] + [(8/3 – 2) – (1/3 – 1)] = 2

Ejercicio 3 de la Opción A de sobrantes 3 de 2001.

Se sabe que la matriz A = $\begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & -1 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix}$ verifica que det(A) = 1 y sus columnas son vectores perpendiculares dos a dos.

(a) [1'5 puntos] Calcula los valores de a y b.

(b) [1 punto] Comprueba que para dichos valores se verifica que $A^{-1} = A^t$ donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

Solución

(a) **u** = (a,0,b); **v** = (0,-1,0); **w** = (-a,0,b)

$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & -1 & 0 \\ b & 0 & b \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} a & -a \\ b & b \end{vmatrix}$ = (-1)(ab+ab) = 1 → - 2ab = 1 → ab = -1/2

Como **u** es perpendicular a **v**, **u•v** = 0 = 0 + 0 + 0

Como **u** es perpendicular a **w**, **u•w** = 0 = - $a^2 + b^2 \rightarrow a^2 = b^2$

Como **v** es perpendicular a **w**, **v•w** = 0 = 0 + 0 + 0

Resolvemos el sistema ab = -1/2 y $a^2 = b^2$

b = -1/(2a), luego $a^2 = [-1/(2a)]^2 = 1/(4a^2)$; de donde $4a^4 = 1 \rightarrow a^4 = 1/4 \rightarrow a = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{4}}$

Para $a = +\sqrt[4]{\frac{1}{4}}$, $b = \frac{-\sqrt[4]{4}}{2}$

Para $a = -\sqrt[4]{\frac{1}{4}}$, $b = \frac{\sqrt[4]{4}}{2}$

(b)Veamos cuando $A^{-1} = A^t$

$A^t = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & -1 & 0 \\ -a & 0 & b \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{Adj}(A^t) = \frac{1}{-2ab}\begin{pmatrix} -b & 0 & -a \\ 0 & 2ab & 0 \\ b & 0 & -a \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} -b & 0 & -a \\ 0 & -1 & 0 \\ b & 0 & -a \end{pmatrix}$ porque –2ab = 1. Además de $a^2 = b^2$, tenemos a = ± b. Si a = -b si escierto que $A^t = A^{-1}$. Si a = b fallan no llegan a coincidir. No he sustituido los valores que hemos obtenido y posiblemente si coincidan.

Ejercicio 4 de la Opción A de sobrantes 3 de 2001.-

Considera los planos $\pi_1 \equiv 2x+5 = 0$ y $\pi_2 \equiv 3x+3y-4 = 0$

(a) [1'25 puntos] ¿Qué ángulo determinan ambos planos?.

(b) [1'25 puntos] Halla el plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los dos planos dados.

Solución

(a) $\mathbf{n_1}$ = (2,0,0); $\mathbf{n_2}$ = (3,3,0). El ángulo que forman dos planos es el menor de los ángulos que forman sun vectores normales.

$\cos\alpha = |\cos(\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2})| = \frac{|\overrightarrow{u_1}\bullet\overrightarrow{u_2}|}{||\overrightarrow{u_1}||\ ||\overrightarrow{u_1}||} = \frac{6}{2\sqrt{18}}$; $\alpha = \arccos\frac{6}{2\sqrt{18}}$ = 45º

$\mathbf{n_1}\bullet\mathbf{n_2} = 6$; $||\mathbf{n_1}|| = \sqrt{2^2+0^2+0^2} = 2$; $||\mathbf{n_2}|| = \sqrt{3^2+3^2+0^2} = \sqrt{18}$

(b) El plano π_3 pasa por O(0,0,0) y sus vectores paralelos son $\mathbf{n_1}$ y $\mathbf{n_2}$, por tanto su ecuación es

$\pi_3 \equiv 0 = \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ = (x-0)(0) – (y-0)(0) + (z-0)(6) = 6z = 0, es decir $\pi_3 \equiv z = 0$

OPCIÓN B

Ejercicio 1 de la Opción B de sobrantes 3 de 2001.

Siendo Ln(x) el logaritmo neperiano de x, considera la función f : $(-1,+\infty) \rightarrow \Re$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} a(x-1) & \text{si } -1<x \le 1 \\ xLn(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(a) [1 punto] Determina el valor de a sabiendo que f es derivable.

(b) [1'5 puntos] Calcula $\int_0^2 f(x)\,dx$

Solución

(a) Como es derivable $f'(x) = \begin{cases} a & \text{si } -1<x \le 1 \\ Ln(x)+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Como es derivable lo es en x = 1, es decir $f'(1^+) = f'(1^-)$

$f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} f'(x) = \lim_{x\to 1} (Ln(x) + 1) = Ln(1) + 1 = 0+1 = 1$

$f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f'(x) = \lim_{x\to 1} (a) = a$

Por tanto como son iguales tenemos a = 1, es decir la función es $f(x) = \begin{cases} 1(x-1) & \text{si } -1<x \le 1 \\ xLn(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$

(b) $\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx = \int_0^1 (x-1)\,dx + \int_1^2 xLn(x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2}Ln(x) - \frac{x^2}{4}\right]_1^2 =$

$= [(1/2 - 1) - 0] + [(2Ln(2) - 1) - (0 - 1/4)] = -5/4 + 2Ln(2)$

$I = \int xLn(x)\,dx = \frac{x^2}{2}Ln(x) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}Ln(x) - 1/2\int x\,dx = \frac{x^2}{2}Ln(x) - \frac{x^2}{4}.$

Ejercicio 2 de la Opción B de sobrantes 3 de 2001.

[2'5 puntos] Detremina la función $f : \Re \rightarrow \Re$ sabiendo que su derivada segunda es constante e igual a 3 y que la recta tangente en el punto de abcisa x = 1 es 5x-y-3 = 0.

Solución

$f''(x) = 3$

Como la recta tangente en x = 1 es y = 5x – 3, tenemos que f '(1) = 5

Como es tangente en x = 1, coincide con la función en x = 1, es decir f(1) = 5(1) – 3 = 2

Por el teorema fundamental del calculo integral

$f'(x) = \int f''(x)\,dx = \int 3\,dx = 3x + K$

De f '(1) = 5 tenemos 5 = 3 + K de donde K = 2, y por tanto f '(x) = 3x + 2

Volviendo a aplicar el teorema fundamental del calculo integral

$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (3x+2)\,dx = 3x^2/2 + 2x + K$

De f (1) = 2 tenemos 2 = 3/2 + 2 + K de donde K = -3/2, y por tanto $f(x) = 3x^2/2 + 2x - 3/2$

Ejercicio 3 de la Opción B de sobrantes 3 de 2001.

Considera el sistema $\left.\begin{array}{rcl} mx+y-z &=& 1 \\ x-my+z &=& 4 \\ x+y+mz &=& m \end{array}\right\}$.

(a) [1'5 puntos] Discutelo según los valores de m.

(b) [1 punto] ¿Cuál es, según los valores de m, la posición relativa de los planos cuyas ecuaciones respectivas son las tres que forman el sistema?

Solución

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -m & 1 & 4 \\ 1 & 1 & m & m \end{pmatrix}$

Si $|A| \neq 0$, rango(A) = rango(A^*) = 3 y el sistema es compatible y determinado, teniendo solución única es decir los tres planos se cortan en un punto.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} -m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & -m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m(-m^2 - 1) - (m - 1) - 1(1 + m) = -m^3 - 3m$$

$-m^3 - 3m = 0 = m(-m^2 - 3) \rightarrow m = 0$ y $m^2 = -3$ que no tiene solución real.

Si $m \neq 0$, rango(A) = rango(A^*) = 3 y el sistema es compatible y determinado, teniendo solución única es decir los tres planos se cortan en un punto.

Si m = 0

En $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, rango(A) = 2

En $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, rango($A^*$) = 3.

Como rango(A) = 2 $\neq$ rango(A^*) = 3 el sistema es incompatible.

Veamos la posición relativa de los tres planos para m = 0

$\pi_1 \equiv y - z = 1$, su vector normal es $\mathbf{n_1} = (0,1,-1)$;

$\pi_2 \equiv x + z = 0$, su vector normal es $\mathbf{n_2} = (1,0,1)$;

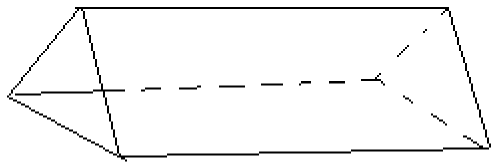
$\pi_3 \equiv x + y = 0$, su vector normal es $\mathbf{n_3} = (1,1,0)$;

Como $\mathbf{n_1}$ no es paralelo a $\mathbf{n_2}$ los planos π_1 y π_2 se cortan en una recta

Como $\mathbf{n_1}$ no es paralelo a $\mathbf{n_3}$ los planos π_1 y π_3 se cortan en una recta

Como $\mathbf{n_2}$ no es paralelo a $\mathbf{n_3}$ los planos π_2 y π_3 se cortan en una recta

Por tanto los tres planos forman un prisma de la forma



Ejercicio 4 de la Opción B de sobrantes 3 de 2001.

Sea r la recta de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} 3x+2y = 0 \\ 3x+z = 0 \end{cases}$.

(a) [1'5 puntos] Halla los puntos de r cuya distancia al origen es de 7 unidades..

(b) [1 punto] Halla la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por el punto P(1,2,-1)

Solución

(a) Ponemos la recta en paramétricas

$z = \lambda$; $3x = -z = -\lambda$, de donde $x = -1/3\ \lambda$

$3(-\lambda/3) = -2y$, de donde $y = \lambda/2$

La recta en paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = (-1/3)\lambda \\ y = (1/2)\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$, por tanto un punto es O(0,0,0) y un vector director sería

$\mathbf{v} = (-1/3, 1/2, 1)$

Un punto genérico de la recta r es $X(-1/3\ \lambda, 1/2\ \lambda, \lambda)$

Me dicen que d(0,r) = 7, es decir $\|\overrightarrow{OX}\| = 7 = \sqrt{\frac{\lambda^2}{9} + \frac{\lambda^2}{4} + \lambda^2}$. Elevando al cudrado tenemos

$\lambda^2/9 + \lambda^2/4 + \lambda^2 = 49$, de donde $\lambda^2 = 36$ y por tanto $\lambda = \pm 6$

Para $\lambda = 6$ el punto genérico es X(-(1/3) (6) , (1/2)(6) , 6) = X(-2,3,6)

Para $\lambda = -6$ el punto genérico es X(-(1/3) (-6) , (1/2)(-6) , -6) = X(2,-3,-6). Luego hay dos puntos

(b) Como me piden el ploano perpendicular a la recta su vector normal **n** coincide con el director de la recta **v** =(-1/3, 1/2, 1). El punto es P(1,2,-1)

El plano pedido es $\pi \equiv -1/3(x-1) + 1/2(y-2) + 1(z+1) = 0$. Multiplicando por 6 nos queda $-2x+3y+6z+2 = 0$