UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD. CURSO 2000-2001. MATEMÁTICAS II

OPCIÓN A

Ejercicio 1 de la Opción A de sobrantes 5 de 2001.

Sea f :R $\rightarrow$ R la función definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & \text{si } x<0 \\ 1-mx-x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

(a) [1'25 puntos] Determina m sabiendo que f es derivable.

(b) [1'25 puntos] Calcula $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

Solución

(a)

Como es derivable tenemos $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & \text{si } x<0 \\ 1-mx-x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ y $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2} & \text{si } x<0 \\ -m-2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Como es derivable, lo es en x = 0, es decir $f(0) = f'(0^+) = f'(0^-)$

$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f'(x) = \lim_{x\to 0} (-m-2x) = -m$

$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f'(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{(1-0)^2} = 1/1 = 1$; por tanto - m = 1, de donde m = - 1

La función es $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & \text{si } x<0 \\ 1+x-x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

(b)

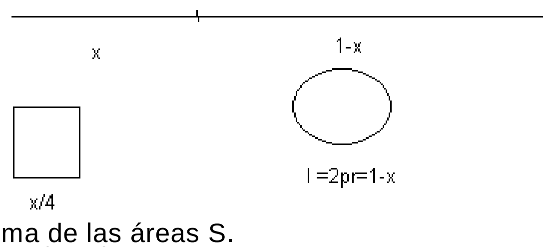
$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \dfrac{1}{1-x}\,dx + \int_{0}^{1} (1+x-x^2)\,dx =$

$= \left[-Ln|1-x|\right]_{-1}^{0} + \left[x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}\right]_{0}^{1} =$ [(-Ln(1)) – (-Ln(2))] + [(1 +1/2 – 1/3) – 0] = Ln(2) + 7/6

Ejercicio 2 de la Opción A de modelo 5 de 2001.

[2'5 puntos] Un hilo de alambre de 1 m. de longitud se corta en dos trozos formando con uno una circunferencia y con el otro un cuadrado. Prueba que la suma de las áreas es mínima cuando el lado del cuadrado es el doble que el radio de la circunferencia.

Solución



La función a optimizar es la suma de las áreas S.

El área del cuadrado es $S_1 = (x/4)^2 = x^2/16$

La longitud de la circunferencia es $l = 2\pi r = 1 - x$, de donde $r = (1-x)/2\pi$, y por tanto el área del círculo es $S_2 = \pi r^2 = \pi[(1-x)/2\pi]^2 = (1/4\pi)(x^2 - 2x + 1)$

La función a optimizar es:

$S(x) = S_1 + S_2 = x^2/16 + (1/4\pi)(x^2 - 2x + 1)$.

Calculamos la 1ª derivada S'(x), la igualamos a 0, calculamos la 2ª derivada para ver que efectivamente es un mínimo (su valor tiene que ser mayor que 0).

$S'(x) = (1/16\pi)(2\pi x + 8x - 8)$

De S'(x) = 0, tenemos $(2\pi x + 8x - 8) = 0$, y resolviéndolo sale $x = 4/(\pi+4)$, que será el posible mínimo.

Como $S''(x) = (1/16\pi)(2\pi + 8) > 0$, independientemente del valor de x, tenemos que $x=4/(\pi+4)$ es un mínimo.

Veamos ahora que el lado del cuadrado $l = x/4$ es el doble del radio de la circunferencia $r = (1-x)/2\pi$

l $= x/4 = [4/(\pi+4)]/4 =$ $\mathbf{1/(\pi+4)}$
$=$**2r** $(1-x)/\pi = (1 - [4/(\pi+4)])/2\pi = ((\pi + 4 - 4)/(\pi+4))/\pi = (\pi/(\pi+4))/\pi =$ $\mathbf{1/(\pi+4)}$**.** Luego efectivamente **el lado del cuadrado es el doble del radio de la circunferencia**.

Ejercicio 3 de la *Opción A* de sobrantes 5 de 2001.

[2'5 puntos] Resuelve el sistema de ecuaciones, dado en forma matricial, AX = - AX + B siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\ \text{ y }\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solución

AX = - AX + B; 2AX = B. Si existiese A^{-1}, multiplicando por la izquierda por A^{-1} obtendríamos
$X = 1/2\cdot A^{-1}\cdot B$
Para que exista A^{-1} tiene que ser $|A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \text{ , luego existe } A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix};\ Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 7 & -2 & -3 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix};\quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t) = \frac{1}{-5}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 7 & -2 & -3 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Por tanto } X = 1/2\cdot A^{-1}\cdot B = 1/2\cdot\ \frac{-1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 7 & -2 & -3 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{10}\cdot\begin{pmatrix} 13 \\ -8 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13/10 \\ 8/10 \\ 7/10 \end{pmatrix}.$$

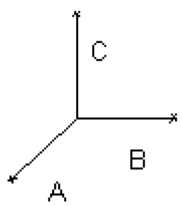
La solución del sistema es X(x,y,z) = (-13/10, 8/10, 7/22)

Ejercicio 4 de la *Opción A* de sobrantes 5 de 2001.-

Considera el plano $\pi \equiv 2x + y + 2z - 4 = 0$
(a) [1'75 puntos] Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano dado con los ejes coordenados.
(b) [0'75 puntos] Calcula la distancia del origen al plano dado.

Solución

(a)

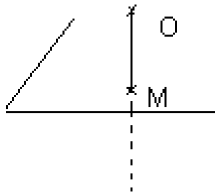


El punto A se obtiene resolviendo el sistema $\pi = 0$, y = 0, z = 0, con lo cual x = 2 y el punto es A(2,0,0)
El punto B se obtiene resolviendo el sistema $\pi = 0$, x = 0, z = 0, con lo cual y = 4 y el punto es B(0,4,0)
El punto C se obtiene resolviendo el sistema $\pi = 0$, x = 0, y = 0, con lo cual x = 2 y el punto es C(0,0,2)
$\overrightarrow{AB} = (-2, 4, 0)$; $\overrightarrow{AC} = (-2, 0, 2)$
El área del triñángulo es la mitad del modulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(8) - \mathbf{j}(-4) + \mathbf{k}(8) = (8, 4, 8)$$

Área triángulo $= (1/2)\cdot\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = (1/2)\cdot\sqrt{8^2+4^2+8^2} = (1/2)\cdot\sqrt{144} = 12/2 = 6$ u.a.

(b)
d(0, π) = d(O, M), siendo M el punto de corte de la recta r perpendicular al plano π por el origen O. Dicha recta tiene como vector director **v** el normal del plano **n** = (2,1,2)



la recta es r $\equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$

M = r $\cap$ π
2(2λ) + λ + 2(2λ) – 4 = 0 $\rightarrow$ 9λ = 4, de donde λ = 4/9 y el punto es M(2(4/9), (4/9), 2(4/9)), luego
d(0, π) = d(O, M) = $||\overrightarrow{OM}|| = \sqrt{(8/9)^2 + (4/9)^2 + (8/9)^2} = \sqrt{144/81}$ = 12/9 u.l.

OPCIÓN B

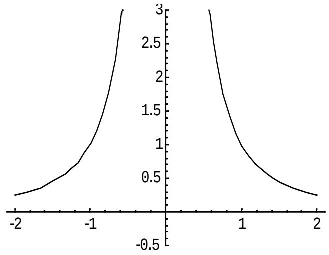
Ejercicio 1 de la Opción B de sobrantes 5 de 2001.

Considera la función f : [0,4] $\rightarrow \Re$ la función definida por f(x) = $\begin{cases} 4x & si \quad 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{16}{(x+1)^2} & si \quad 1 < x < 3 \\ 4 - x & si \quad 3 \le x \le 4 \end{cases}$

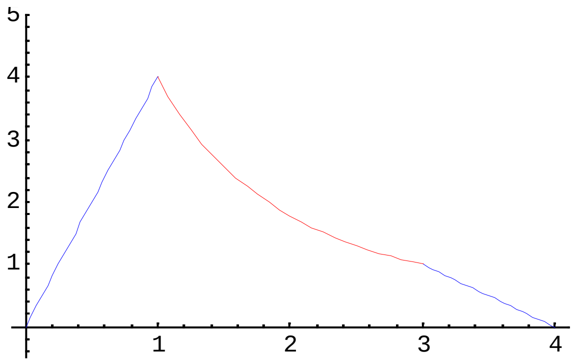
(a) [1 punto] Determina la gráfica de f.
(b) [1'5 puntos] Halla el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abcisas.

Solución

(a)
La gráfica de $1/x^2$ es conocida



La gráfica de $\dfrac{16}{(x+1)^2}$ es parecida a la de $1/x^2$ pero desplazada una unidad hacia la izauierda en abcisas, está dibujada en rojpo mas abajo.
Las gráficas de 4x y de 4 – x son rectas, luego sencillas de dibaujar.
La gráfica global es



(b)
Área = $\int_1^4$ f(x) dx = $\int_0^1$ f(x) dx + $\int_1^3$ f(x) dx + $\int_3^4$ f(x) dx = $\int_0^1$ (4x) dx + $\int_1^3 \dfrac{16}{(x+1)^2}$ dx + $\int_3^4$ (4-x) dx =

$= \left[2x^2\right]_0^1 + \left[\dfrac{-16}{x+1}\right]_1^3 + \left[4x - \dfrac{x^2}{2}\right]_3^4$ = [(2) – 0] + [(-16/4) – (-16/2)] + [(16 – 8) – (12 – 9/2)] = 13/2 u.a.

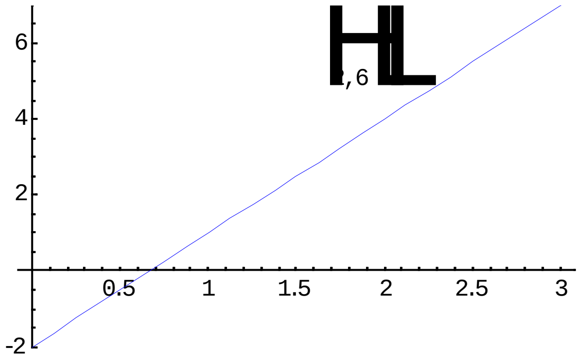
Ejercicio 2 de la Opción B de sobrantes 5 de 2001.

[2'5 puntos] Considera la función f : [0,3] $\rightarrow \Re$ definida por f(x) = 3x – 2. Calcula el punto de la gráfica de f mas cercano al punto (2,6) y calcula tambien el mas alejado.

Solución

Para calcular el punto mas cercano de f al punto A(2,6) tenemos que minimizar la función d(A,X), siendo X un punto genérico del segmento

Veámoslo gráficamente antes



X(x,y) = X(x, 3x-2)

$\overrightarrow{AX}$ = (x-2, 3x-2-6) = (x-2, 3x-8)

d(A,X) = || $\overrightarrow{AX}$ || = $\sqrt{(x-2)^2+(3x-8)^2}$ = d(x)

Derivamos para calcular los extremos relativos

$$d'(x) = \frac{2(x-2)+2(3x-8)\cdot 3}{2\sqrt{(x-2)^2+(3x-8)^2}} = \frac{10x-26}{\sqrt{(x-2)^2+(3x-8)^2}}$$

d '(x) = 0; 10x – 26 = 0, de donde x = 26/10 = 13/5. El punto sería X(13/5, 3(13/5)-2) = X(13/5, 29/5).

Veamos si es máximo o mínimo, para lo cual entramos en la segunda derivada

$$d''(x) = \frac{10\cdot\sqrt{(x-2)^2+(3x-8)^2} - (10x-26)\cdot\dfrac{10x-26}{\sqrt{(x-2)^2+(3x-8)^2}}}{(x-2)^2+(3x-8)^2}$$

$$d''(13/5) = \frac{10\cdot\sqrt{(13/5-2)^2+(3(13/5)-8)^2} - 0}{\text{positivo}} > 0, \text{ luego es un mínimo}$$

Para calcular el punto más alejado del segmento al punto A(2,6), si nos fijamos en la gráfica el punto tiene que ser uno de los extremos del segmento, es decir el (0, -2) o el (3,7). Calcularíamos la distancia a ambos puntos y veríamos que el más alejado, que es el que lo hace máximo, es el (0,-2)

Ejercicio 3 de la Opción B de sobrantes 5 de 2001.

[2'5 puntos] Determina todos los puntos del plano 2x – y + 2z – 1 = 0 que equidistan de los puntos A(3,0,-2) y B(1,2,0). ¿Qué representa geométricamente?

Solución

Tomamos un punto genérico de dicho plano X(x,y,z)

d(A,X) = d(B,X), es decir || $\overrightarrow{AX}$ || = || $\overrightarrow{BX}$ ||; $\overrightarrow{AX}$ = (x-3, y, z+2) ; $\overrightarrow{BX}$ = (x-1, y-2, z)

|| $\overrightarrow{AX}$ || = $\sqrt{(x-3)^2+(y)^2+(z+2)^2} = \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z)^2}$ = || $\overrightarrow{BX}$ ||. Elevando al cuadrado y simplificando nos queda –4x + 4y + 4z + 8 = 0

Como el punto X es del plano, verifica la ecuación de dicho plano 2x – y + 2z – 1 = 0. Por tnato los puntos pedidos verifican a la vez $\begin{cases} -x+y+z+2=0 \\ 2x-y+2z-1=0 \end{cases}$, que es la ecuación de una recta dada en su forma implícita.

Ejercicio 4 de la Opción B de sobrantes 5 de 2001.

Considera la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$

(a) [1 punto] Determina para que valores del parámetro λ la matriz A no tiene inversa.
(b) [1'5 puntos] Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para λ = - 2.

Solución

(a) Para que A no tenga inversa tiene que ser |A| = 0

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1(1-\lambda^2) - \lambda(\lambda) + 1(\lambda^2) = 1-\lambda^2 = 0$; de donde $\lambda^2 = 1$, y las soluciones son $\lambda = \pm 1$. Por tanto si $\lambda = 1$ o $\lambda = -1$ entonces no existe A^{-1}.

(b)

Calculemos A^{-1} para $\lambda = -2$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $|A| = 1 - (-2)^2 = 1 - 4 = -3$

La matriz inversa es $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\text{Adj}(A^t)$; $A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$; $\text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, luego

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A^t) = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$