Ejercicio 1 de la Opción A de sobrantes de 2002.

Sea Ln(x) el logaritmo neperiano de x y sea $f : D \to \Re$ la función definida por $f(x) = \dfrac{1}{x(Ln(x))^2}$.

(a) [1'5 puntos] Determina el conjunto D sabiendo que está formado por todos los puntos $x \in \Re$ para os que existe f(x).
(b) [1 punto] Usa el cambio de variable t = Ln(x) para calcular una primitiva de f.

Solución

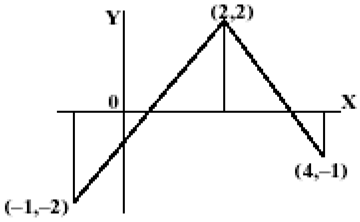
(a) Ln(x) solo existe para x > 0, por tanto el dominio de $f(x) = \dfrac{1}{x(Ln(x))^2}$ como es un cociente, aparte de los n^{os} x > 0,hemos de quitar los números que anulan el denominador que en nuestro caso es x = 1 puesto que Ln(1) = 0. Por tanto el dominio pedido son los n^{os} x > 0 salvo el nº x = 1

(b) $\int \dfrac{1}{x(Ln(x))^2}\,dx = \int \dfrac{dt}{t^2} = \dfrac{t^{-2+1}}{-2+1} = -1/t = -1/(Ln(x)) + K$

Cambio Ln(x) = t $\to$ (1/x)· dx = dt

Ejercicio 2 de la Opción A de sobrantes de 2002.

Sea f :[-1,4] $\to \Re$ una función cuya derivada tiene por gráfica la de la figura.



(a) [1'5 puntos] Estudia el crecimiento y decrecimiento de f y determina los valores donde alcanza sus extremos relativos.
(b) [1 punto] Estudia la concavidad y convexidad de f. ¿Tiene puntos de inflexión la gráfica de f?

Solución

(b) f ' crece de (-1,2) $\to$ f '' > 0 en (-1,2) $\to$ luego f es convexa ($\cup$) en (-1,2)
f ' decrece de (2,4) $\to$ f '' < 0 en (2,4) $\to$ luego f es cóncava ($\cap$) en (2,4)
luego por definición x = 2 es un punto de inflexión de f
(a) Para determinar la monotonía antes tenemos que determinar la ecuación de la recta r que une los puntos (-1,-2) con (2,2) y su corte con el eje OX, así como la de la recta s que une los puntos (2,2) con (4,-1).

Recta $r \equiv y = mx + n \to \begin{cases} -2 = -m+n \\ 2 = 2m+n \end{cases} \to 3m = 4 \to m = 4/3$, de donde n = -2+m = -2 + 4/3 = -2/3, luego
$r \equiv y = mx + n = 4/3x - 2/3$
r corta al eje OX en y = 0 $\to$ 4/3·x = 2/3 $\to$ x = 1/2 . Punto (1/2, 0)

Recta $s \equiv y = mx + n \to \begin{cases} 2 = 2m+n \\ -1 = 4m+n \end{cases} \to -3 = 2m \to m = -3/2$, de donde n = 2 - 2m = 2 + 3 = 5, luego
$s \equiv y = mx + n = -3/2x + 5$
s corta al eje OX en y = 0 $\to$ -3/2·x = - 5 $\to$ x = 10/3 . Punto (10/3, 0)

f ' < 0 en (-1,1/2) $\cup$(10/3,4) $\to$ f decrece en (-1,1/2)$\cup$ (10/3,4)
f ' > 0 en (1/2,10/3) $\to$ f crece en (1/2,10/3)
f '(1/2) = 0 y f '(10/3) = 0
Por definición y teniendo en cuenta lo anterior x = 1/2 es un mínimo relativo y x = 101/3 es un máximo relativo.

Ejercicio 3 de la Opción A de sobrantes de 2002.

[2'5 puntos]. En el sector de las aceitunas sin hueso, tres empresas A, B y C, se encuentran en competencia. Calcula el precio por unidad dado por cada empresa sabiendo que verifican las siguientes relaciones:
- El precio de la empresa A es 0'6 euros menos que la media de los precios establecidos por B y C.
- El precio dado por B es la media de los precios de A y C.
- El precio de la empresa C es igual a 2 euros mas 2/5 del precio dado por A mas 1/3 del precio dado por B.

Solución

x = precio de la empresa A
y = precio de la empresa B
z = precio de la empresa C
Las relaciones son
x = (y+z)/2 – 0’6 $\rightarrow$ 2x = y + z – 1’2
y = (x+z)/2 $\rightarrow$ 2y = x + z
z = 2 + 2/5·x + 1/3· y $\rightarrow$ 15z = 30 + 6x + 5y
El sistema es
x – 2y + z = 0
2x – y - z = 1’2
6x + 5y - 15z = - 30

Matriz de los coeficientes M = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 6 & 5 & -15 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada M* = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1'2 \\ 6 & 5 & -15 & -30 \end{pmatrix}$

Como |M| = $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 6 & 5 & -15 \end{vmatrix}$ = -12 $\neq$ 0, rango (M) = rango (M*) = 3 y por el Teorema de Rouche el sistema tiene solución única

$$(x,y,z) = \left(\frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1'2 & -1 & -1 \\ -30 & 5 & -15 \end{vmatrix}}{|M|}, \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1'2 & -1 \\ 6 & -30 & -15 \end{vmatrix}}{|M|}, \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1'2 \\ 6 & 5 & -30 \end{vmatrix}}{|M|} \right)$$ = (-120/-12, -115’2/-12, -110’4/-12) = (10, 9’6, 9’2)

También se puede resolver por Gauss y el resultado es el mismo.
El sistema es
x – 2y + z = 0
2x – y - z = 1’2
6x + 5y - 15z = - 30

Matriz asociada $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1'2 \\ 6 & 5 & -15 & -30 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ 2^a+1^a(-2) \\ 3^a+1^a(-6) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1'2 \\ 0 & 17 & -21 & -30 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ 3^a+2^a(-6) \end{array} \rightarrow$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1'2 \\ 0 & -1 & -3 & -37'2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \text{cambio} \\ 2^a \text{ por } 3^a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -37'2 \\ 0 & 3 & -3 & 1'2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ 3^a+2^a(3) \end{array} \rightarrow$

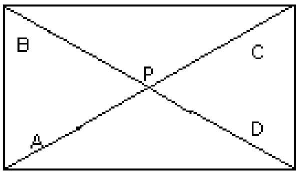
$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -37'2 \\ 0 & 0 & -12 & -110'4 \end{array}\right) \rightarrow$ sistema asociado $\begin{cases} x & -2y & +z & =0 \\ & -y & -3z & =-37'2 \\ & & -12z & =-110'4 \end{cases}$

z = (110’4)/(12) = 9´3 €
y = 37’2 – 3z =37’2 – 3(9’2) = 9’6 €
x = 2y – z = 2(9’6) – 9’2 = 10 €
Que son las mismas soluciones de antes

Ejercicio 4 de la Opción A de sobrantes de 2002.-

Considera los puntos A(1,-3,2), B(1,1,2) y C(1,1,-1).
(a) [1’25 puntos] ¿Pueden ser A, B y C vértices consecutivos de un rectángulo? Justifica la respuesta.
(b) [1’25 puntos] Halla, si es posible, las coordenadas de un punto D para que el paralelogramo ABCD sea un rectángulo

Solución



(a) Si A, B y C son vértices consecutivos de un rectángulo los vectores **AB** y **CB** son perpendiculares ($\perp$) y por tanto su producto escalar es cero.
AB = (0,4,0)
CB = (0,0,3)
AB•CB = (0,4,0) •(0,0,3) = 0 + 0 + 0 = 0, por tanto A, B y C son los vértices consecutivos de un rectángulo.
(b) En un rectángulo las diagonales se cortan en su punto medio.
P = punto medio de los puntos A y C = [(1+1)/2, (-3+1)/2, (2-1)/2] = (1, -1, 1/2)
P = punto medio de los puntos B y D = (1, -1, 1/2) = [(1+x)/2, (1+y)/2, (2+z)/2] = (1, -1, 1/2).
Igualando
$1 = (1+x)/2 \rightarrow 2 = 1+x \rightarrow x = 1$
$-1 = (1+y)/2 \rightarrow -2 = 1+y \rightarrow y = -3$
$1/2 = (2+z)/2 \rightarrow 1 = 2+z \rightarrow z = -1$
El vértice D es D = (1, -3, -1)

Ejercicio 1 de la Opción B de sobrantes de 2002.

[2'5 puntos] Determina el valor de las constantes c y d sabiendo que la función $f : \Re \rightarrow \Re$ definida por $f(x) = x^3 + 3x^2 + cx + d$ tiene como recta tangente en su punto de inflexión a la recta y = 3x + 4..

Solución

$f(x) = x^3 + 3x^2 + cx + d$
la recta tangente en su punto de inflexión es y = 3x+4
El punto de inflexión es la solución de la ecuación f ''(x) = 0
$f'(x) = 3x^2 + 6x + c$
$f''(x) = 6x + 6$
$f''(x) = 0 \rightarrow 6x + 6 = 0 \rightarrow x = -1$ que es el punto de inflexión
La pendiente de la recta tangente en x = -1 es f '(-1) y además también es 3 que es la pendiente de la recta tangente que me han dado luego f '(-1) = 3.
Como es tangente en x = -1, pasa por y(-1) = 3(-1) + 4 = 1, es decir por el punto (-1,1) $\rightarrow$ f(-1) = 1
De $f'(-1) = 3 \rightarrow 3 = 3(-1)^2 + 6(-1) + c \rightarrow c = 6$
De $f(-1) = 1 \rightarrow 1 = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 6(-1) + d \rightarrow d = 5$

Ejercicio 2 de la Opción B de sobrantes de 2002.

[2'5 puntos] Calcula $\int \frac{x^3+2x^2-2x+3}{x^2-1}\,dx$

Solución

$$I = \int \frac{x^3+2x^2-2x+3}{x^2-1}\,dx$$

Como el numerador es de mayor grado que el denonimador tenemos que efectuar la división

x^3+2x^2-2x+3	$x^2 -1$
$-x^3+x$	$x+2$
$2x^2-x+3$	
$-2x^2+2$	
$-x+5$	

$$I = \int \frac{x^3+2x^2-2x+3}{x^2-1}\,dx = \int (x+2)\,dx + \int \frac{-x+5}{x^2-1}\,dx = x^2/2 + 2x + I_1$$

$$I_1 = \int \frac{-x+5}{x^2-1}\,dx = \int \frac{A}{x-1}\,dx + \int \frac{B}{x+1}\,dx = A\cdot Ln|x-1| + B\cdot Ln|x+1| =$$

$= 2\cdot Ln|x-1| + (-3)\cdot Ln|x+1|$

$$\frac{-x+5}{x^2-1} = \frac{-x+5}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x+1)(x-1)} \rightarrow$$

$\rightarrow -x + 5 = A(x+1) + B(x-1)$
Si $x = 1 \rightarrow 4 = A(2) \rightarrow A = 2$

Si $x = -1 \rightarrow 6 = B(-2) \rightarrow B = -3$
Luego $I = x^2/2 + 2x + I_1 = x^2/2 + 2x + 2\cdot Ln|x-1| + (-3)\cdot Ln|x+1| + K$

Ejercicio 3 de la Opción B de sobrantes de 2002.

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(a) [1 punto] Calcula la matriz inversa de A.
(b) [1 punto] Calcula A^{127} y A^{128}.
(c) [0'5 puntos] Determina x e y tal que AB = BA.

Solución

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Como $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, existe la matriza inversa A^{-1}.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t) = (1/-1)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) $A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

$A^3 = A^2\cdot A = I_3\cdot A = A$
$A^4 = A^2\cdot A^2 = I_3\cdot I_3 = I_3$
Por tanto las potencias impares da la matriz A y las potencias pares la matriz identidad I_3.
$A^{127} = A^{126}\cdot A = (A^2)^{63}\cdot A = (I_3)^{63}\cdot A = I_3\cdot A = A$ y $A^{128} = (A^2)^{64}\cdot A = (I_3)^{64} = I_3$.
(c) AB = BA

$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $BA = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$

Igualando AB = BA tenemos $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$.

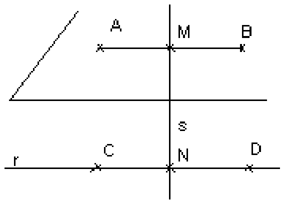
De la igualdad de matrices obtenemos x = 0 e y = 1

Ejercicio 4 de la Opción B de sobrantes de 2002.

Considera los puntos A(1,1,1), B(2,2,2), C(1,1,0) y D(1,0,0).
(a) [1'25 puntos] Halla la ecuación del plano que contiene a los puntos A y B y no corta a la recta determinada por C y D.
(b) [0'75 puntos] Halla las ecuaciones de la recta determinada por los puntos medios de los segmentos AB y CD.

Solución

(a) A(1,1,1), B(2,2,2), C(1,1,0) y D(1,0,0).



Plano π que contiene a A y B. Punto A(1,1,1); vector **v** = **AB** = (1,1,1)
Como el plano π no corta a la recta r determinada por C y D, la recta r es paralela (||) al plano π y por tanto el vector **CD** = (0,-1,0) es paralelo al plano π.

$$\pi \equiv \det(A, \mathbf{AB}, \mathbf{CD}) = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (x-1)(1) - (y-1)(0) + (z-1)(-1) = x - z = 0$$

(b) Punto medio del segmento AB, M = ((1+2)/2, (1+2)/2, (1+2)/2) = (3/2, 3/2, 3/2)
Punto medio del segmento CD, N = ((1+1)/2, (1+0)/2, (0+0)/2) = (1, -1, 0)
La recta s tiene como punto N(1, 1/2, 0) y como vector **v** = **MN** = (1-3/2, 1/2 - 3/2, 0 – 3/2) = (-1/2, -1, -3/2)

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda/2 \\ y = 1/2 - \lambda \\ z = 0 - 3/2\lambda \end{cases}$$