PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD MATEMÁTICAS II DE ANDALUCÍA
CURSO 2001-2002.

Opción A

Ejercicio 1 de la Opción A de sobrantes 2 de 2002.

(a) [1'5 puntos] Determina la función f: R $\rightarrow$ R sabiendo que $f'(x) = 2x^3 - 6x^2$ y que su valor mínimo es –12.
(b) [1 punto] Calcula la ecuación de las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de inflexión de su gráfica.

Solución

(a) $f'(x) = 2x^3 - 6x^2$.
Los posibles máximos o mínimos son las soluciomes de $f'(x) = 0$
$2x^3 - 6x^2 = x^2(2x - 6) = 0 \rightarrow x^2 = 0$, de donde $x = 0$ y $2x - 6 = 0$, de donde $x = 3$.
Como $f'(-1) < 0$, f(x) decrece en $(-\infty, 0)$
Como $f'(1) < 0$, f(x) decrece en (0, 3)
Como $f'(4) > 0$, f(x) crece en $(3, +\infty)$
Por definición x = 3 es un mínimo, y su valor era -12 es decir f(3) = -12
Por el teorema fundamental del cálculo intgral
$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (2x^3 - 6x^2)\,dx = 2\cdot x^4/4 - 6\cdot x^3/3 + K = 1/2\cdot x^4 - 2x^3 + K$
De $f(3) = -12 \rightarrow -12 = (1/2)\cdot(3)^4 - 2(3)^3 + K$.
Operando K = 3/2 luego $f(x) = (1/2)\cdot x^4 - 2x^3 + 3/2$.
(b) Los punto de inflexión son las soluciones de $f''(x) = 0$, siempre que en ellos haya cambio de curvatura.
$f''(x) = 6x^2 - 12x \rightarrow f''(x) = 0 \rightarrow 6x(x - 2) = 0$ de donde x = 0 y x = 2.
Como $f''(-1) > 0 \rightarrow$ f(x) es convexa ($\cup$) en $(-\infty, 0)$
Como $f''(1) < 0 \rightarrow$ f(x) es concava ($\cap$) en (0, 2)
Como $f''(3) > 0 \rightarrow$ f(x) es convexa ($\cup$) en $(2, +\infty)$
Por definición x = 0 y x = 2 son punto de inflexión.

Recta tangente en x = 0 $\rightarrow$ $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$
$f(x) = (1/2)\cdot x^4 - 2x^3 + 3/2$ y $f'(x) = 2x^3 - 6x^2$.
f(0) = 3/2; $f'(0) = 0$
La recta tangente en x = 0 es y – 3/2 = 0

Recta tangente en x = 2 $\rightarrow$ $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$
$f(x) = (1/2)\cdot x^4 - 2x^3 + 3/2$ y $f'(x) = 2x^3 - 6x^2$.
f(2) = -13/2; $f'(2) = -8$
La recta tantgente en x = 0 es y + 13/2 = - 8(x – 2)

Ejercicio 2 de la Opción A de sobrantes 2 de 2002.

Sea f: R $\rightarrow$ R la función definida por $f(x) = x|x - 4|$
(a) [0'75 puntos] Esboza la gráfica de f.
(b) [0'75 puntos] Estudia su derivabilidad en x = 4.
(c) [1 punto] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abcisas.

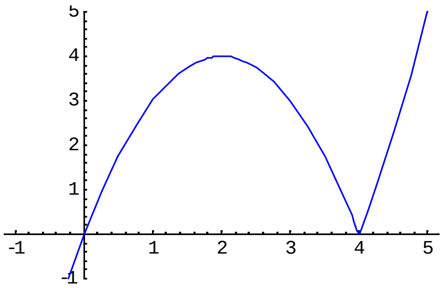
Solución

$f(x) = x|x-4| = \begin{cases} x^2 - 4x & \text{si } x \ge 4 \\ -x^2 + 4x & \text{si } x < 4 \end{cases}$, porque $|x-4| = \begin{cases} x - 4 & \text{si } x \ge 4 \\ -x + 4 & \text{si } x < 4 \end{cases}$

(a) $x^2 - 4x$ es una parábola con el vértice de abcisa x = 2 [$f'(x) = 0 \rightarrow 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2$], luego en el punto (2,f(2)) = (2,-4). Corta a los ejes en (0,0) y (4, 0) y las ramas hacia arriba. Solo la dibujaremos para $x \ge 4$

$-x^2 + 4x$ es una parábola con el vértice de abcisa x = 2 [$f'(x) = 0 \rightarrow -2x + 4 = 0 \rightarrow x = 2$], luego en el punto (2,f(2)) = (2,4). Corta a los ejes en (0,0) y (4, 0) y las ramas hacia abajo. Solo la dibujaremos para x < 4

Luego la gráfica es



(b) $f'(x) = \begin{cases} 2x-4 & \text{si } x>4 \\ -2x+4 & \text{si } x<4 \end{cases}$.

Sabemos que la función valor absoluto, y las funciones polinómicas son continuas en todo R, luego f es continua en R por producto y compuesta de funciones continuas, en particular en x = 4.

f es derivable en x = 4 si $f'(4^+) = f'(4^-)$, estamos viendo la continuidad de la derivada (es mas fácil)

$f'(4^+) = \lim_{x\to 4^+} f'(x) = \lim_{x\to 4} (2x-4) = 4$

$f'(4^-) = \lim_{x\to 4^-} f'(x) = \lim_{x\to 4} (-2x+4) = -4$

Como $f'(4^+) \neq f'(4^-)$, no existe f ' (4)

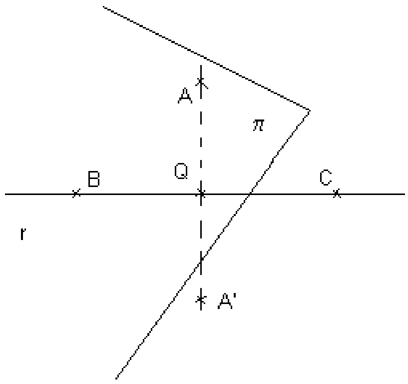
(c) Área = $\int_{+0}^{+4} (-x^2+4x)\,dx = \left[\frac{-x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}\right]_{+0}^{+4} = (-4^3/3 + 4^3/2) = 32/3$ u.a.

Ejercicio 3 de la Opción A de sobrantes 2 de 2002.

[2'5 puntos] Considera los puntos A(1,-1,2), B(1,3,0) y C(0,0,1). Halla el punto simétrico de A rrespecto de la recta que pasa por B y C.

Solución

A(1,-1,2), B(1,3,0) y C(0,0,1).



Calculamos el plano π que pasa por el punto A y es perpendicular a la recta r (determinada por B y C), por tanto su vector normal **n** es el vector director de la recta, es decir **n** = **v** = **BC** = (-1,-3,1)

Despues determinamos el punto Q como intersección de la recta r y el plano π

Por último A' es el simétrico de A respeto al punto Q

$r \equiv \begin{cases} \text{Punto } B(1,3,0) \\ \text{vector } \mathbf{v} = \mathbf{BC} = (-1,-3,1) \end{cases} \equiv \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 3-3\lambda \\ z = 0+\lambda \end{cases}$

$\pi \equiv \mathbf{n}\bullet(\mathbf{x}-\mathbf{a}) = (-1)(x-1) + (-3)(y+1) + (1)(z-2) = -x - 3y + z - 4 = 0 \equiv \pi$

$Q = r \cap \pi$

$-(1-\lambda) - 3(3-3\lambda) + (\lambda) = 0 \rightarrow 11\lambda = 14 \rightarrow \lambda = 14/11$

Q(1- 14/11, 3 – 3(14/11), 14/11) = Q(-3/11, -9/11, 14/11)

Q(-3/11, -9/11, 14/11) es el punto medio de A(1,-1,2) y A'(x,y,z), luego

-3/11 = (x+1)/2 , de donde x = -17/11

-9/11 = (y-1)/2, de donde y = -7/11

14/11 = (z+2)/2, de donde z = 6/11

El simétrico buscado es A'(x,y,z) = A'(-17/11, -7/11, 6/11)

Ejercicio 4 de la Opción A de sobrantes de 2002

[2'5 puntos] Sean A = $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1-\alpha & 3 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} \alpha-1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$, b = $\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$, c = $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, X = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Determina α, si es posible, para uq los sistemas de ecuaciones (dados en forma matricial)

AX = b, BX = c

Tengan infinitas soluciones (cada uno de ellos).

Solución

A = $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1-\alpha & 3 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} \alpha-1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$, b = $\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$, c = $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, X = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Para que AX = b tenga infinitas soluciones por el Teorema de Rouche rango(M) = rango(M^*) < 3, siendo M = $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1-\alpha & 3 \end{pmatrix}$ y M^* = $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & -5 \\ 2 & 1-\alpha & 3 & 3 \end{pmatrix}$, con lo cual tiene que ser det(M) = |M| = 0.

Calculamos el determinante de M

det(M) = |M| = $\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1-\alpha & 3 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 1^aC + 3^aC(-\alpha) \\ 2^aC + 3^aC(-\alpha) \end{pmatrix} \right\} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1-2\alpha & 1 & 2 \\ 2-3\alpha & -2-\alpha & 3 \end{vmatrix} =$

$=1(+1)\begin{vmatrix} -1-2\alpha & 1 \\ 2-3\alpha & -2-\alpha \end{vmatrix}$ = $(-1-2\alpha)(-2-\alpha) - (2-3\alpha) = 2\alpha^2 + 9\alpha$

$|M| = 0 \rightarrow 2\alpha^2 + 9\alpha = 0 \rightarrow \alpha(2\alpha+ 9) = 0$, de donde $\alpha = 0$ y $\alpha = -9/2$

Si $\alpha = 0$ en M = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, rango(M) = 2

En M^* como $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ = { (2ªC + 3ªC) }= $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ = (-1)(-4+4) = 0, rango(M^*) = 2

Por tanto como rango(M) = rango(M^*) = 2 < nº de incógnitas el sistema tiene infinitas soluciones

Si $\alpha = -9/2$ en M = $\begin{pmatrix} -9/2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1-9/2 & 3 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, rango(M) = 2

En M^* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1+9/2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ = { (2ªC + 3ªC y 1ºC+3ªC) }= $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & -5 \\ 4+9/2 & 6 & 3 \end{vmatrix}$ = $(-1)(-12 + 51/2) \neq 0$, luego rango(M^*) = 3

Por tanto como rango(M) $\neq$ rango(M^*) , el sistema es incompatible.

Repetimos el proceso

Para que BX = c tenga infinitas soluciones por el Teorema de Rouche rango(M) = rango(M^*) < 3, siendo M = $\begin{pmatrix} \alpha-1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$ y M^* = $\begin{pmatrix} \alpha-1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$, con lo cual tiene que ser det(M) = |M| = 0.

Calculamos el determinante de M

det(M) = |M| = $\begin{vmatrix} \alpha-1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -\alpha & 0 \end{vmatrix}$ =$(-\alpha)(-1)$ $\begin{vmatrix} \alpha-1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ = $\alpha(2\alpha - 1)$

$|M| = 0 \rightarrow \alpha(2\alpha - 1) = 0$, de donde $\alpha = 0$ y $\alpha = 1/2$

Si $\alpha = 0$ en $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, rango(M) = 2

En M^* como $\begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, por tener un fila de ceros, rango(M^*) = 2

Por tanto como rango(M) = rango(M^*) = 2 < nº de incógnitas el sistema tiene infinitas soluciones

Si $\alpha = 1/2$ en $M = \begin{pmatrix} 1/2-1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, rango(M) = 2

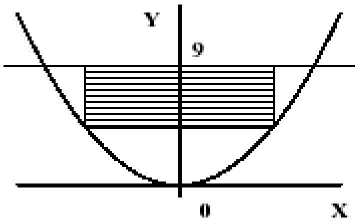
En M^* como $\begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 5 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1/2)(-5+4) \neq 0$, rango($M^*$) = 3

Por tanto como rango(M) $\neq$ rango(M^*) , el sistema es incompatible.
En ambos casos los sistemas tienen infinitas soluciones solo cuando $\alpha = 0$.

Opción B

Ejercicio 1 de la Opción B de sobrantes 2 de 2002

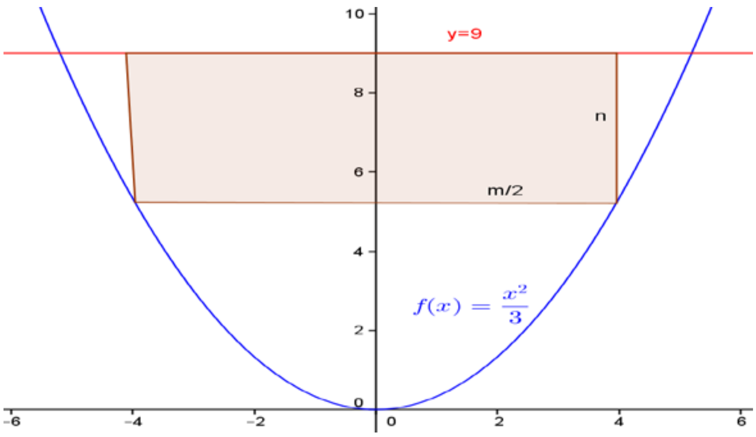
[2'5 puntos] Considera el recinto limitado por la curva $y = (1/3)\cdot x^2$ y la recta $y = 9$.



De entre todos los rectángulos situados como el de la figura, determina el que tiene área máxima.

Solución

Tomamos como lados del rectángulo m y n, luego la mitad de la base es m/2



Hay que optimizar Área = A = m·n
La relación es n = ordenada recta – ordenada parábola en (m/2) = $9 - 1/3(m/2)^2 = (108 - m^2)/12$
Luego $A = m\cdot n = m\cdot(108 - m^2)/12 = (108m - m^3)/12$
Calculamos A' y la igualamos a cero para ver el posible máximo
$A' = (108 - 3m^2)/12 \rightarrow A' = 0 \rightarrow (108 - 3m^2)/12 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow 3m^2 = 108 \rightarrow m^2 = 36 \rightarrow m = \pm 6$.
Solo tomamos la solución positiva porque es una distancia, luego m = 6 y por tanto
$n = (108 - m^2)/12 = (108 - 36)/12 = 6$
Luego el rectángulo es un cuadrado de lado 6
Veamos que efectivamente es un máximo comprobando que la 2ª derivada es menor que cero.
$A' = (108 - 3m^2)/12$

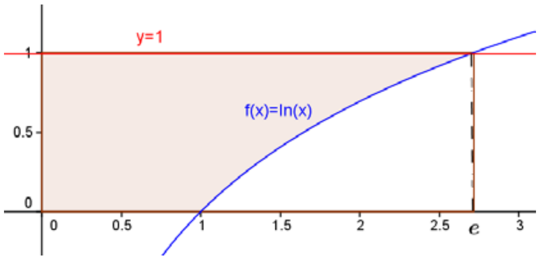
A'' = (-6m)/12 $\rightarrow$ A''(6) = (-36)/12 = - 3 < 0, luego es un máximo.

Ejercicio 2 de la Opción B de sobrantes 2 de 2002.

[2'5 puntos] Sea Ln(x) el logaritmo neperiano de x. Esboza el recinto limitado por los ejes coordenados y las gráficas de las funciones y = 1 e y = Ln(x). Calcula su área.

Solución

La gráfica de Ln(x) es conocida (recíproca de la exponenecial e^x, luego simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante y = x)



Ln(x) = 1, por definición x = e^1 = e

Area = $\int_{+0}^{+1}$ (1) dx + $\int_{+1}^{+e}$ (1 – Ln(x)) dx

Calculamos $\int$ Ln(x) dx = que es una integral por partes

u = Ln(x) $\rightarrow$ du = (1/x) dx

dv = dx $\rightarrow$ v = $\int$ dx = x,

luego $\int$ Ln(x) dx = xLn(x) - $\int$ x(1/x) dx = xLn(x) - $\int$ dx = xLn(x) – x

Area = $\int_{+0}^{+1}$ (1) dx + $\int_{+1}^{+e}$ (1 – Ln(x)) dx =

$= [x]_{+0}^{+1} + [x-(xLn(x)-x)]_{+1}^{+e}$ = (1 – 0) + (eLn(e) – 1Ln(1)) = (1 + e) unidades de área (u.a.)

Ejercicio 3 de la Opción B de sobrantes 2 de 2002.

Sea π el plano de ecuación 3x – y +2z – 4 = 0,

(a) [1 punto] Halla la ecuación del plano π_1 que es paralelo a π y pasa por el punto P(1,-2,2).

(b) [1'5 puntos] Halla la ecuación del plano π_2 que es perpendicular a ambos que contienen a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x-y+z = 1 \\ 2x+y-4z = 1 \end{cases}.$$

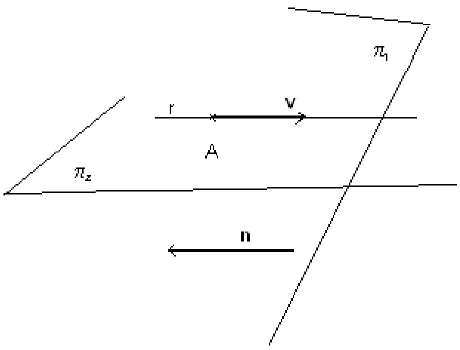
Solución

(a)

$\pi \equiv$ 3x - y +2z – 4 = 0. Como π_1 es paralelo a π y pasa por el punto P(1,-2,2), π_1 es de la forma 3x - y +2z = k, por se paralelo a π. Ahora le imponemos la condición de que pasa por el punto P para calcular la constante k

3(1) – (-2) + 2(2) = k $\rightarrow$ k = 9, luego el plano pedido es $\pi_1 \equiv$ 3x - y +2z = 9

(b)



π_2 contiene a la recta r $\equiv \begin{cases} x-y+z = 1 \\ 2x+y-4z = 1 \end{cases}$, por tanto tiene un punto A de la recta r y uno de sus vectores paralelos es el vector director **v** de r. Además como π_2 es perpendicular a π_1 el vector normal **n** = (3,-1,2) de

π_1 es paralelo al plano π_2 luego el plano π_2 está determinado por el punto A y los vectores independientes **v** y **n**, es decir tendrá de ecuación det(**x**-**a**, **v**, **n**) = 0.
Calculamos A y **v**
Para el punto A tomamos z = 1 en la recta r luego de x-y+z = 1 tenemos x = y. Entrando en la otra ecuación de r nos queda 2x + x - 4 = 1, de donde x = 5/3 e y = 5/3. El punto es A(5/3, 5/3,1)
Como la recta la dan como intersección de dos planos calculamos su vector director como el producto vectorial de los vectores normales de cada plano

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(3) - \mathbf{j}(-6) + \mathbf{k}(3) = (3,6,3)$$

El plano pedido es $\pi_2 \equiv \det(\mathbf{x}-\mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{n}) = \begin{vmatrix} x-5/3 & y-5/3 & z-1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (x-5/3)(15)-(y-5/3)(-3)+(z-1)(-21) =$

$= 15x - 25 + 3y - 5 - 21z + 21 = 15x + 3y - 21z - 9 = 0.$
Simplificando $\pi_2 \equiv 5x + y - 7z - 3 = 0$

Ejercicio 4 de la Opción B de sobrantes de 2002.

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) [1 punto] Halla los valores de a para que la matriz 3A tiene inversa.
(b) [1'5 puntos] Calcula, si es posible, la inversa de A^2 para a = 0.

Solución

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que 3·A admita matriz inversa tenemos que ver que $\det(3\cdot A) = |3\cdot A| \neq 0$, pero $|3\cdot A| = 3^3\cdot A$ puesto que A es de orden 3x3, y sale un 3 multiplicando de cada una de las filas de A. Por tanto tenemos que ver que $|A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-1)\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & -1 \end{vmatrix} = -1 - a^2$$

Igualando a cero vemos que $a^2 = -1$ lo cual nos dá $a = \pm\sqrt{-1}$ y no no tiene soluciones reales, es decir $|A| \neq 0$ independientemente del valor de a, por tanto la matriz A siempre admite inversa.

(b)

Para a = 0, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$|A^2| = |A|\cdot|A| = (-1)(-1) = 1$

$(A^2)^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\cdot \mathrm{Adj}(A^2)^t$

$$(A^2)^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{Adj}(A^2)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto $(A^2)^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\cdot \mathrm{Adj}(A^2)^t = (1/1)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.