

Ejercicio 1 de la Opción A de sobrantes 6 de 2002.

[2'5 puntos] De entre todas las rectas que pasan por el origen de coordenadas, determina las que son tangentes a la curva de ecuación $y = 1/4 \cdot x^2 + 4x + 4$. Calcula los puntos de tangencia correspondientes.

Solución

$y = mx$ es una recta que pasa por el origen (0, 0)

Parábola $f(x) = 1/4 \cdot x^2 + 4x + 4$

Si la recta $y = mx$ es tangente a $f(x) = 1/4 \cdot x^2 + 4x + 4$, tienen que coincidir por tanto las igualamos

$$1/4 \cdot x^2 + 4x + 4 = mx$$

Por otro lado como es recta tangente su pendiente $y' = m$ coincide con la pendiente de la recta tangente de un punto genérico que es $f'(x) = 1/2x + 4$. Igualándolo tenemos

$$m = 1/2x + 4$$

Resolvemos el sistema

$$1/4 \cdot x^2 + 4x + 4 = mx$$

$$m = 1/2x + 4. \text{ Sustituyendo en la 1ª}$$

$$1/4 \cdot x^2 + 4x + 4 = mx = (1/2x + 4)x = 1/2x^2 + 4x. \text{ De donde } 1/4x^2 - 1/2x^2 + 4 = 0. \text{ Operando nos queda } x^2 = 16, \text{ de donde } x = \pm 4.$$

Para $x = 4$ la pendiente es $m = 4/2 + 4 = 6$. La recta es $y = 6x$ y la ordenada es $6(4) = 24$. Punto (4,24)

Para $x = -4$ la pendiente es $m = -4/2 + 4 = 2$. La recta es $y = 2x$ y la ordenada es $2(-4) = -8$. Punto (-4,-8)

Ejercicio 2 de la Opción A de sobrantes 6 de 2002.

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 \cdot e^{(x/2)}$

(a) [1 punto] Calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(b) [1'5 puntos] Calcula los intervalos de monotonía y los extremos locales de f (puntos donde se obtienen y valor que alcanzan).

Solución

$$f(x) = x^2 \cdot e^{(x/2)}$$

(a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot e^{(x/2)} = (+\infty)(e^{+\infty}) = (+\infty)(+\infty) = (+\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \cdot e^{(x/2)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x)^2 \cdot e^{(-x/2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} (x)^2 / e^{(x/2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{x/2}} = ((-x)^2 \cdot e^{(-x/2)}) / (+\infty) \text{ y le aplicamos la Regla de L'Hopital}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{x/2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{(1/2)e^{x/2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{e^{x/2}} = (+\infty) / (+\infty) \text{ le volvemos a aplicar la Regla de L'Hopital}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{e^{x/2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{(1/2)e^{x/2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8}{e^{x/2}} = \frac{8}{+\infty} = 0, \text{ por tanto la recta } y = 0 \text{ es una asíntota horizontal en } -\infty \text{ de}$$

la función $f(x) = x^2 \cdot e^{(x/2)}$

(b)

Para la monotonía realizamos el estudio de $f'(x)$

$$f(x) = x^2 \cdot e^{(x/2)}$$

$$f'(x) = 2x \cdot e^{(x/2)} + x^2 \cdot e^{(x/2)}(1/2) = e^{(x/2)}(2x + x^2/2)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow (2x + x^2/2) = 0 \text{ puesto que la exponencial no se anula nunca}$$

$$(2x + x^2/2) = 0 = x(2 + x/2), \text{ de donde } x = 0 \text{ y } x = -4$$

Como $f'(-5) > 0$, $f(x)$ es creciente en $(-\infty, -4)$

Como $f'(-2) < 0$, $f(x)$ es decreciente en $(-4, 0)$

Como $f'(1) > 0$, $f(x)$ es creciente en $(0, +\infty)$

Por definición $x = -4$ es un máximo y vale $f(-4) = 16 \cdot e^{-2} = 16/e^2$

Por definición $x = 0$ es un mínimo y vale $f(0) = 0$

Ejercicio 3 de la Opción A de sobrantes 6 de 2002.

$$\text{Considera el sistema de ecuaciones } \begin{cases} x-my+z = 1 \\ x+y+z = m+2 \\ x+y+mz = 4 \end{cases}$$

(a) [1'5 puntos] Clasifícalo según los valores del parámetro m .

(b) [2 puntos] Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado

Solución

$$\begin{cases} x-my+z = 1 \\ x+y+z = m+2 \\ x+y+mz = 4 \end{cases} \text{ Matriz de los coeficientes } M = \begin{pmatrix} 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

Matriz ampliada $M^* = \begin{pmatrix} 1 & -m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m+2 \\ 1 & 1 & m & 4 \end{pmatrix}$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = \{ (2^{\text{a}}F - 1^{\text{a}}F \text{ y } 3^{\text{a}}F - 1^{\text{a}}F) \} = \begin{vmatrix} 1 & -m & 1 \\ 0 & 1+m & 0 \\ 0 & 1+m & m-1 \end{vmatrix} = (1) \cdot \begin{vmatrix} 1+m & 0 \\ 1+m & -1+m \end{vmatrix} = (1+m)(-1+m)$$

$|M| = 0$ si $(1+m)(-1+m) = 0$ de donde $m = 1$ y $m = -1$

Si $m \neq 1$ y $m \neq -1$, $\text{rango}(M) = \text{rango}(M^*) = 3 = n^\circ$ de incógnitas, y por el Teorema de Rouché el sistema es compatible y determinado (tiene solución única).

Si $m = -1$

En $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, $\text{rango}(M) = 2$

En $M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$, $\text{rango}(M^*) = 2$

Como $\text{rango}(M) = \text{rango}(M^*) = 2 < n^\circ$ de incógnitas, y por el Teorema de Rouché el sistema es compatible e indeterminado (tiene infinitas soluciones). Tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas principales.

$$x+y+z = 1$$

$$x+y-z = 4$$

restando $-2z = 3$, de donde $z = -3/2$

Tomando $y = \lambda$, luego $x+y - (-3/2) = 4$; $x = 4 - 3/2 - \lambda = 5/2 - \lambda$

La solución es $(x,y,z) = (5/2 - \lambda, \lambda, -3/2)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Si $m = 1$

En $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, $\text{rango}(M) = 2$

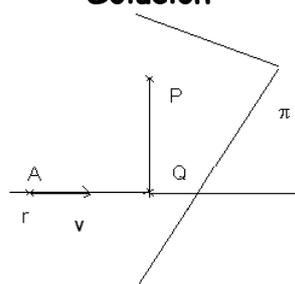
En $M^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 10$, $\text{rango}(M^*) = 3$

Como $\text{rango}(M) \neq \text{rango}(M^*)$, por el Teorema de Rouché el sistema es incompatible.

Ejercicio 4 de la Opción A de sobrantes 6 de 2002.-

[2'5 puntos] Halla el punto de la recta $r \equiv \begin{cases} x+3y+z = 1 \\ y+z = -1 \end{cases}$ que está más cercano al punto $P(1,-1,0)$.

Solución



El punto más cercano de la recta r al punto P es el punto Q que está en la proyección ortogonal de P sobre r . Para determinarlo tenemos que calcular el plano π perpendicular a la recta r por el punto P . Como π es perpendicular a r el vector normal \mathbf{n} del plano coincide con el vector director \mathbf{v} de r

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(2) - \mathbf{j}(1) + \mathbf{k}(1) = (2, -1, 1) = \mathbf{n}$$

$$\pi \equiv \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = (2)(x-1) + (-1)(y+1) + (1)(z-0) = 2x - y + z - 3 = 0$$

Un punto A de r sería. Tomando $z = 1$, tenemos $y = -1 - z = -2$ y $x = 1 - 3y - z = 1 - 3(-2) - 1 = 6$. El punto A es $A(6, -2, 1)$

La recta r en paramétricas conocido el punto $A(6, -2, 1)$ y el vector $\mathbf{v} = (2, -1, 1)$ es

$$x = 6 + 2\lambda$$

$$y = -2 - \lambda$$

$$z = 1 + \lambda$$

El punto Q es la intersección de la recta r con el plano π , para lo cual sustituimos la ecuación de la recta en el plano

$$2(6+2\lambda) - (-2-\lambda) + (1+\lambda) - 3 = 0 \rightarrow 6\lambda + 12 = 0 \rightarrow \lambda = -2$$

El punto pedido es $Q(6+2(-2), -2-(-2), 1+(-2)) = Q(2, 0, -1)$

Ejercicio 1 de la Opción B de sobrantes 6 de 2002.

[2'5 puntos] Estudia la derivabilidad de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

Solución

Si $x > 0$, $f(x) = \text{sen}x/x$, luego $f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot x - \text{sen}(x)}{x^2}$

Si $x < 0$, $f(x) = 0$, luego $f'(x) = 0$

Veamos si existe $f'(0)$ calculando $f'(0^+)$, $f'(0^-)$ y viendo si son iguales.

$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) \cdot x - \text{sen}(x)}{x^2} = \frac{\cos(0) \cdot 0 - \text{sen}(0)}{0^2} = 0/0$. Le aplicamos la regla de L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) \cdot x - \text{sen}(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\text{sen}(x) \cdot x + \cos(x) - \cos(x)}{2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\text{sen}(x)}{2} = 0/2 = 0$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (0) = 0$$

Como $f'(0^-) = f'(0^+) = 0$, existe $f'(0) = 0$ por tanto $f'(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot \cos(x) - \text{sen}(x)}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

Ejercicio 2 de la Opción B de sobrantes 6 de 2002.

[2'5 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de la parábola $y = -(x-2)^2 - 2$, la recta tangente a la gráfica de la parábola en el punto de abscisas $x = 3$, el semieje positivo de abscisas y el semieje negativo de ordenadas. Calcula su área

Solución

La gráfica de la parábola $y = -(x-2)^2 - 2$ es la misma que la de la parábola $-x^2$ pero desplazada 2 unidades hacia la derecha y 2 unidades hacia abajo, es decir con el vértice en el punto $(2, -2)$.

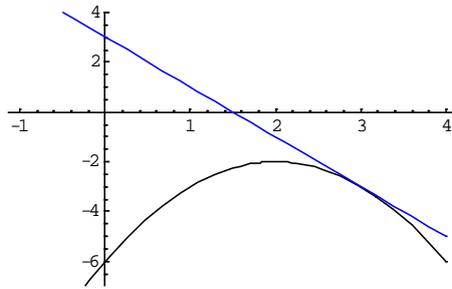
La recta tangente en $x = 3$ es $y - f(3) = f'(3)(x-3)$

$$f(x) = -(x-2)^2 - 2 \rightarrow f(3) = -(3-2)^2 - 2 = -3$$

$$f'(x) = -2(x-2) \rightarrow f'(3) = -2(3-2) = -2$$

La recta tangente en $x = 3$ es $y + 3 = -2(x-3)$. Operando queda $y = -2x + 3$. Su gráfica es una recta y con dos valores se obtiene.

La gráfica conjunta es (en azul la recta)



Para determinar el área encerrada tenemos que calcular el punto de corte de la recta $y = -2x + 3$ con el eje de abscisas OX haciendo $y = 0$, y nos queda $x = 3/2$

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \left| \int_0^{3/2} [-(x-2)^2 - 2] dx + \int_0^{3/2} [(-2x+3) - (-(x-2)^2 - 2)] dx \right| = \\ &= \left| \left[\frac{-(x-2)^3}{3} - 2x \right] \Big|_0^{3/2} + \left[-x^2 + 3x + \frac{(x-2)^3}{3} + 2x \right] \Big|_0^{3/2} \right| = \\ &= \left| \left[\frac{-(3/2-2)^3}{3} - 3 \right] - \left[\frac{-(8/3-0)}{3} - 0 \right] \right| + \left| \left[-9/4 + 9/2 + 1/3 + 6 \right] - \left[-9/4 + 9/2 + (3/2-2)^3/3 + 3 \right] \right| = \\ &= |-45/8| + |19/2| = 45/8 + 19/2 = 121/8 \text{ unidades de área (u.a.)} \end{aligned}$$

Ejercicio 3 de la Opción B de sobrantes 6 de 2002.

[2'5 puntos] Sin desarrollarlo, calcula el valor del determinante de la matriz $\begin{pmatrix} k & x & 1+ax \\ 2k & y & 2+ay \\ 3k & z & 3+az \end{pmatrix}$ y enuncia las propiedades que hayas utilizado.

Solución

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} k & x & 1+ax \\ 2k & y & 2+ay \\ 3k & z & 3+az \end{vmatrix} &= \{ 2^a F + 1^a(-2) \text{ y } 3^a F + 1^a(-3) \} = \begin{vmatrix} k & x & 1+ax \\ 0 & y-2x & ay-2ax \\ 0 & z-3x & az-3ax \end{vmatrix} = \\ &= k \cdot \begin{vmatrix} y-2x & a(y-2x) \\ z-3x & a(z-3x) \end{vmatrix} = k \cdot a \cdot \begin{vmatrix} y-2x & y-2x \\ z-3x & z-3x \end{vmatrix} = k \cdot a \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Propiedades utilizadas

Sumarle a una fila otra multiplicada por un número

Desarrollar por el adjunto de un elemento cuando el resto de los elementos son nulos

Si todos los miembros de una fila o columna están multiplicados por un número dicho número puede salir fuera del determinante multiplicando

Un determinante con dos filas o columnas iguales es cero

Ejercicio 4 de la Opción B de sobrantes 6 de 2002.

Considera la recta r y el plano π siguientes: $r \equiv \begin{cases} x+z-a = 0 \\ y-az-1 = 0 \end{cases}, \pi \equiv 2x - y = b.$

(a) [1'5 puntos] Determina a y b sabiendo que está contenida en π .

(b) [1 punto] Halla la ecuación de un plano que contenga a r y sea perpendicular a π .

Solución

Como la recta r está contenida en el plano π el sistema de ecuaciones formado por la recta y el plano

$$x + z = a$$

$$y - az = 1$$

$$2x - y = b$$

es compatible e indeterminado con $\text{rango}(M) = \text{rango}(M^*) = 2$, siendo

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ la matriz de los coeficientes y}$$

$$M^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & -a & 1 \\ 2 & -1 & 0 & b \end{pmatrix} \text{ la matriz ampliada}$$

$$\text{Como rango}(M) = 2 \text{ entonces } |M| = 0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \{2^a F + 3^a F\} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a \\ 2 & 0 & -a \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -a \end{vmatrix} = -a - 2 = 0, \text{ de donde } a = -2$$

$$\text{Como rango}(M^*) = 2 \text{ entonces } \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & b \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & b \end{vmatrix} = \{2^a F + 3^a F\} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & b+1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & b+1 \end{vmatrix} = b+1+4 = 5, \text{ de donde } b = -5$$

Por tanto para que la recta esté contenida en el plano $a = -2$ y $b = -5$

La recta es

$$+x + z = -2$$

$$+y + 2z = 1$$

y el plano es $\pi \equiv 2x - y = -5$

(b)

El plano π' que nos piden contiene a r luego de r tomamos un punto A y su vector director \mathbf{v} . El otro vector que necesitamos para el plano como es perpendicular a π es su vector normal $\mathbf{n} = (2, -1, 0)$

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-1) - \mathbf{j}(2) + \mathbf{k}(1) = (-1, -2, 1)$$

Para el punto A de r tomamos $z = 1$, de donde $y = 1 - 2z = 1 - 2 = -1$ y $x = -2 - z = -2 - 1 = -3$. Luego el punto es $A(-3, -1, 1)$

$$\text{El plano buscado es } \pi' \equiv \det(\mathbf{x} - \mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{n}) = \begin{vmatrix} x+3 & y+1 & z-1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (x+3)(1) - (y+1)(-2) + (z-1)(5) = x + 2y + 5z = 0$$