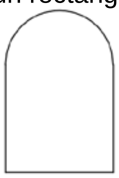
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD MATEMÁTICAS II DE ANDALUCÍA CURSO 2010-2011.

Opción A

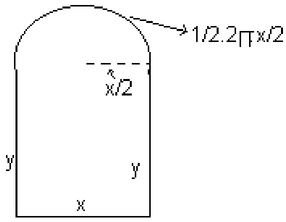
Ejercicio 1, Opción A, Modelo especifico2 de Junio de 2011.

[2'5 puntos] Una ventana normanda consiste en un rectángulo coronado con un semicírculo.



De entre todas las ventanas normandas de perímetro 10 m, halla las dimensiones del marco de la de área máxima.

Solución



Función a optimizar Área = $x\cdot y + (1/2)\cdot\pi(x/2)^2$.

Relación entre las variables: perímetro $10 = 2y + x + \pi x/2$, de donde $y = 5 - x/2 - \pi x/4$.
$A = x\cdot y + (1/2)\cdot\pi(x/2)^2 = x\cdot(5 - x/2 - \pi x/4) + (1/2)\cdot\pi(x/2)^2 = 5x – x^2/2 - \pi x^2/4 + (1/2)\cdot\pi(x/2)^2 = A(x)$.

Sabemos que su $A'(a) = 0$ y $A''(a) < 0$, $x = a$ es un máximo relativo.

$A(x) = 5x - x^2/2 - \pi x^2/4 + (1/2)\cdot\pi(x/2)^2$
$A'(x) = 5 - x - \pi x/2 + (1/2).\pi.2(x/2).(1/2) = 5 - x - \pi x/2 + \pi x/4 = 5 - x - \pi x/4$.
De $A'(x) = 0$, tenemos $5 - x - \pi x/4 = 0$, es decir $5 = x + \pi x/4 = x(1 + \pi/4)$, por tanto $x = 5/(1 + \pi/4)$.

Las dimensiones del marco son:
$x = 5/(1 + \pi/4)$; $y = 5 - x/2 - \pi x/4$; $y = 5 – 5/[2(1 + \pi/4)] - 5\pi/[4(1 + \pi/4)]$ y la semicircunferencia = $\pi/[2(1 + \pi/4)]$.

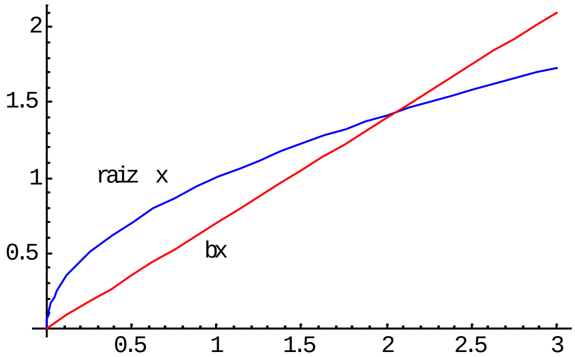
Veamos que es un máximo:
$A'(x) = 5 - x - \pi x/4$.
$A''(x) = - 1 - \pi/4$, luego $A''(1 + \pi/4) = - 1 - \pi/4 < 0$ (no depende del valor), y efectivamente es un máximo.

Ejercicio 2, Opción A, Modelo especifico2 de Junio de 2011.

[2'5 puntos] Calcula el valor de $b > 0$, sabiendo que el área de la región comprendida entre la curva $y = \sqrt{(x)}$ y la recta $y = bx$ es de 4/3 unidades cuadradas.

Solución

La recta $y = bx$ pasa por el origen de coordenadas, como $b > 0$ está en el primer cuadrante.
La gráfica de la función recta $f(x) = \sqrt{(x)}$ es la de una parábola horizontal, que en 0 vale 0, en 4 vale 2 etc.., y no existe para los números negativos.
Las gráficas aproximadas son



Para calcular el área igualamos las funciones para ver los puntos de corte

$\sqrt{x} = bx$, elevando al cuadrado $x=b^2x^2$, de donde $b^2x^2 - x = x(b^2x - 1)=0$, y las soluciones son $x=0$ y $x=1/b^2$.

Área $= 4/3 = \int_0^{1/b^2} (\sqrt{x} - bx)\,dx = [(2/3)x^{3/2} - bx^2/2]_0^{1/(b^2)} = [2.\sqrt{x^3}/3 - bx^2/2]_0^{1/(b^2)} =$

$= [(2.^2\sqrt{(1/b^2)^3})/3 - b.(1/b^2)^2/2] - 0 = 2/(3b^3) - 1/2b^3$.

Resolvemos $2/(3b^3) - 1/2b^3 = 4/3$, de donde $1 = 8b^3$, es decir $b^3 = 1/8$, **luego $b = \sqrt[3]{1/8} = 1/2$.**

Ejercicio 3, Opción A, Modelo especifico2 de Junio de 2011.

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(a) [1 punto] ¿Hay algún valor de λ para el que A no tiene inversa?
(b) [1'5 puntos] Para $\lambda = 1$, resuelve la ecuación matricial $A^{-1}.X.A = B$.

Solución

(a)
¿Hay algún valor de λ para el que A no tiene inversa?

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$ no tiene inversa si det(A) = 0.

$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \begin{matrix}\text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila}\end{matrix} = 1(\lambda^2 + 1)$. $|A| = 0$, nos dá $\lambda^2 + 1 = 0$, que no tiene solución real. **Para todos los valores de λ, la matriz A tiene inversa**.

(b)
Para $\lambda = 1$, resuelve la ecuación matricial $A^{-1}.X.A = B$.
Como A tiene inversa A^{-1}, multiplicando por la izquierda por A y por la derecha por A^1 la expresión $A^{-1}.X.A=B$ ternemos $A.A^{-1}.X.A.\ A^{-1} = A.B.\ A^{-1}$, de donde $I.X.I = A.B.\ A^{-1}$, por tanto **$X = A.B.\ A^{-1}$**.

Si $\lambda = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $|A| = (1)^2 + 1 = 2$; $A^{-1} = (1/|A|).Adj(A^t)$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = (1/|A|).Adj(A^t) = (1/2).\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Luego **X** $= A.B.\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.(1/2).\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (1/2).\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$

$= (1/2).\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4, Opción A, Modelo especifico2 de Junio de 2011.

Dados los puntos A(1,0,0), B(0,0,1) y P(1,−1,1), y la recta r definida por $\begin{cases} x-y-2=0 \\ z=0 \end{cases}$

(a) [2 puntos] Halla los puntos de la recta r cuya distancia al punto P es de 3 unidades.
(b) [0'5 puntos] Calcula el área del triángulo ABP.

Solución

(a)
Halla los puntos de la recta r cuya distancia al punto P es de 3 unidades.
Se X un punto genérico de la recta, me están diciendo que d(P,X) = 3, y d(P,X) = ||**PX**||, es decir el módulo del vector **PX**.
Ponemos la recta "r" en vectorial, para lo cual tomamos y = a, con "a" nº real, de donde x = 2+a, y el punto genérico de "r" es (x,y,z) = (2+a, a, 0) con "a" nº real. P(1,−1,1),

PX = (2+a-1, a+1, -1); ||**PX**|| = $\sqrt{(a+1)^2+(a+1)^2+(1)^2}$.
Resolvemos la ecuación $\sqrt{(a+1)^2+(a+1)^2+(1)^2} = 3$. Elevamos ambos miembros al cuadrado.
$2.(a+1)^2 + 1 = 9$, de donde $2.(a+1)^2 = 8$, es decir $(a+1)^2 = 4$. Desarrollando $a^2 + 2a + 1 = 4$.
De $a^2 + 2a - 3 = 0$, tenemos las soluciones son a = 1 y a = -3. Ambas soluciones son válidas porque verifican la ecuación $\sqrt{(a+1)^2+(a+1)^2+(1)^2} = 3$, por tanto **los puntos de la recta pedidos son**:
X_1(2+(1), (1), 0) = **X_1(3, 1, 0)** **y** X_2(2+(-3), (-3), 0) = **X_2(-1, -3, 0).**
(b)
Calcula el área del triángulo ABP, con A(1,0,0), B(0,0,1) y P(1,−1,1).

Sabemos que el área de un triángulo ABP es la mitad del área del paralelogramo que determinan su lados AB y AP, es decir la mitad del módulo (|| ||) determinado por los vectores **AB** y **AP**, luego el Área del triángulo es = (1/2)·||**AB**x**AP**||.
AB = (0-1, 0-0, 1-0) = (-1, 0, 1)

AP = (1-1, -1-0, 1-0) = (0, -1, 1)

$$\mathbf{AB}\times\mathbf{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(0+1) - \mathbf{j}(-1-0) + \mathbf{k}(1-0) = (1,1,1)$$

||**AB**x**AC**|| = $\sqrt{(1)^2+(1)^2+(1)^2} = \sqrt{3}\ u^2$

Área del triángulo es = (1/2)·||**AB**x**AC**|| = (1/2)·$\sqrt{3}\ u^2$

Opción B

Ejercicio 1, Opción B, Modelo especifico2 de Junio de 2011.

Sea f : [1/e,4] → R la función definida por $f(x) = \begin{cases} x-\ln(x)+a & \text{si } 1/e \le x \le 2 \\ bx+1-\ln(2) & \text{si } 2 < x \le 4 \end{cases}$, donde ln denota la función logaritmo neperiano.
(a) [1'25 puntos] Calcula los valores de a y b para que f sea derivable en el intervalo (1/e,4).
(b) [1'25 puntos] Para a = 0 y b = 1/2 halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Solución

(a)
Calcula los valores de a y b para que f sea derivable en el intervalo (1/e,4).

$$f(x) = \begin{cases} x-\ln(x)+a & \text{si } 1/e \le x \le 2 \\ bx+1-\ln(2) & \text{si } 2 < x \le 4 \end{cases}.$$

Como nos dicen que es derivable sabemos que es continua y derivable en x = 2, pues ccada rama por separado es continua y derivable en su dominio.

Como f es continua en x = 2 tenemos que:

$$f(2) = \lim_{x\to 2^-} [f(x)] = \lim_{x\to 2^+} [f(x)]$$

$f(2) = \lim_{x\to 2^-} [f(x)] = \lim_{x\to 2^-} [\ x - \ln(x) + a\ ] = 2 - \ln(2) + a$
$\lim_{x\to 2^+} [f(x)] = \lim_{x\to 2^+} [\ bx+1-\ln(2)\ ] = 2b+1-\ln(2)$.
Como es continua, igualando tenemos 2 - ln(2) + a = 2b+1-ln(2), de donde 2+a = 2b+1, luego **a = 2b – 1**.

Como f sea derivable en x = 2 tenemos que:

$$f'(0^-) = f'(0^+)$$

Vamos a utilizar la continuidad de la derivada que es más rápido

$$f(x) = \begin{cases} x-\ln(x)+a & \text{si } 1/e \le x \le 2 \\ bx+1-\ln(2) & \text{si } 2 < x \le 4 \end{cases};\quad f'(x) = \begin{cases} 1-\dfrac{1}{x} & \text{si } 1/e < x \le 2 \\ b & \text{si } 2 < x < 4 \end{cases}.$$

$f'(2^-) = \lim_{x\to 2^-} [f'(x)] = \lim_{x\to 2^-} [1- (1/x)] = 1- (1/2) = 1/2$.
$f'(2^+) = \lim_{x\to 2^+} [f'(x)] = \lim_{x\to 2^+} [\ b\ ] = b$, como f es derivable en x = 2, igualando tenemos **b = 1/2**.
Luego **a =** 2(1/2) – 1 = **0** y **b = 1/2**.
(b)
Para a = 0 y b = 1/2 halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Nuestra función es $f(x) = \begin{cases} x\text{-}\ln(x) & \text{si } 1/e \le x \le 2 \\ x/2+1-\ln(2) & \text{si } 2 < x \le 4 \end{cases}$, y su derivada $f'(x) = \begin{cases} 1-\dfrac{1}{x} & \text{si } 1/e < x \le 2 \\ 1/2 & \text{si } 2 < x < 4 \end{cases}$.

Sabemos que los extremos absolutos de una función f, se encuentran entre los extremos del intervalo X 0 1/e, x = 4, las soluciones de f'(x) = 0, y los puntos donde f no es continua ni derivable. En nuestro caso sólo nos falta ver las soluciones de f'(x) = 0. Después entramos con cada valor en f, el mayor es el máximo absoluto y el menor es el mínimo absoluto.
De f'(x) = 0, tenemos 1-1/x = 0, de donde 1 = 1/x, y la solución es x = 1.
Entramos con 1/e, 1 y 4 en f. (Cada valor se sustituye en su rama)
$f(1/2) = (1/2) - \ln((1/2)) \cong 1'19$.
$f(1) = 1 - \ln(1) = 1$.
$f(4) = 4/2 +1 - \ln(4) \cong 1'61$.
El máximo absoluto se alcanza en x = 4 y vale f(4) = 3 - ln(4).
El mínimo absoluto se alcanza en x = 1 y vale f(1) = 1.

Ejercicio 2, Opción B, Modelo especifico2 de Junio de 2011.

[2'5 puntos] Sea $f : (0;+\infty) \to R$ la función definida por f(x) = x(1 - ln(x)), donde ln denota la función logaritmo neperiano. Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto P(1,1).

Solución

Una primitiva F(x) es $F(x) = \int x.(1-\ln(x).dx$, que es una integral por partes ($\int u.dv = u.v - \int v.du$)

Tomamos u = 1-ln(x) de donde du = -dx/x), y dv = xdx de donde $v = \int xdx = x^2/2$, luego nos resulta

$F(x) = \int x.(1-\ln(x).dx = (x^2/2).(1-\ln(x)) - \int[(x^2/2)/x)](-dx) = (x^2/2).(1-\ln(x)) + (1/2).\int xdx) =$
$= (x^2/2).(1-\ln(x)) + x^2/4 + K$.

Como pasa por el punto P(1,1), tenemos F(1) = 1, es decir 1 = (1/2).(1-0)) + 1/4 + K, de donde K = 1/4, y la primitiva pedida es: $F(x) = (x^2/2).(1-\ln(x)) + x^2/4 + 1/4$.

Ejercicio 3, Opción B, Modelo especifico2 de Junio de 2011.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(a) [1'75 puntos] Calcula el rango de A según los diferentes valores de t.
(b) [0'75 puntos] Razona para qué valores de *t* el sistema homogéneo AX = O tiene más de una solución.

Solución

(a)
Calcula el rango de A según los diferentes valores de t.
Para calcular el rango de A, estudiamos primero su determinante det(A) = |A|, pues sabemos que si $|A| \neq 0$, el rango de A es 3.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_2-C_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & t-1 & t-1 \\ -2t-1 & 2t+1 & t+3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = (1).[(t-1)(t+3) - (t-1)(2t+1)] = (t-1)[(t+3) - (2t+1)] =$
$= (t-1)(-t+2)$

Si |A| = 0, tenemos (t-1)(-t+2) = 0, de donde t-1= 0 y -t+2 = 0, y obtenemos t = 1 y t = 2.
Si $t \neq 1$ y $t \neq 2$, $|A| \neq 0$, y rango(A) = 3.

Si t = 1, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1+1 & 1-1 \\ -2(1)-1 & 0 & 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2-F_1 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Como nos quedan dos filas con números distinto de cero, rango(A) = 2.

Si t = 2, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2+1 & 2-1 \\ -2(2)-1 & 0 & 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1-C_3 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2-C_1 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Como nos quedan dos columnas con números distinto de cero, rango(A) = 2.

(b)
Razona para qué valores de *t* el sistema homogéneo AX = O tiene más de una solución.

Sabemos que un sistema homogéneo tiene mas de una solución si |A| = 0 (en este caso A es de orden 3). Esto lo hemos visto en el apartado (a).
El sistema homogéneo AX = O tiene más de una solución si t = 1 y **t = 2**.

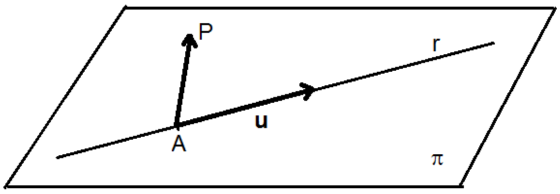
Ejercicio 4, Opción B, Modelo especifico2 de Junio de 2011.

Dados el punto *P*(1,1,-1) y la recta r de ecuaciones $\begin{cases} x+z=1 \\ y+z=0 \end{cases}$

(a) [1 punto] Halla la ecuación del plano que contiene a r y pasa por P.
(b) [1'5 puntos] Halla la ecuación de la recta contenida en el plano de ecuación y + z = 0, que es perpendicular a *r* y pasa por *P*.

Solución

(a)
Halla la ecuación del plano que contiene a r y pasa por P.

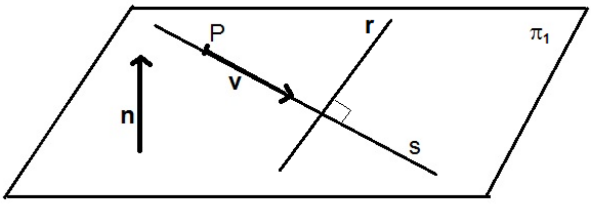


Sabemos que un plano π está determinado por un punto y un vector normal, o bien por un punto y dos vectores independientes. En nuestro caso el punto A (uno de la recta), el vector **u,** (un director de la recta) y el vector **AP**. El plano π será det(**AX,u,AP**) = 0, siendo X un punto genérico del plano.

Ponemos la recta "r" en vectorial. Tomo z = a, con "a" número real, luego x = 1-a, y = -a, y la ecuación vectorial es "r" ≡ (x,y,z) = (1-a, -a, a) con "a" número real.
Punto A(1,0,0); vector director **u** = (-1,-1,1); vector **AP** = (1-1,1-0,-1-0) = (0,1,-1)

Plano $\pi \equiv$ det(**AX**,**u**,**AP**) = 0 = $\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila = (x-1)(0) - (y)(1) + (z)(-1) = -y - z = 0 ó y+z = 0

(b)
Halla la ecuación de la recta "s" contenida en el plano de ecuación $\pi_1 \equiv$ y + z = 0, que es perpendicular a *r* y pasa por *P*.



Para determinar la recta "s" necesito un punto, el P(1,1,-1), y un vector de dirección el **v.**
La ecuación de la recta "s" en vectorial es (x,y,z) = (1+a.λ,1+b.λ,-1+c λ), con **v** = (a,b,c) y λ un número real.
Como "s" está contenida en π_1, tenemos y = -z, es decir 1 + b = -(-1 + c), de donde b = -c, y el vector **v** es **v**=(a,-c,c).
Como la recta "r" es perpendicular a la recta "s", sus vectores directores son perpendiculares y su producto escalar es 0, es decir **u•v** = 0, es decir **u•v** = 0 = (-1,-1,1)•(a,-c,c) = -a + c + c = 0, de donde a = 2c, y el vector **v** es **v** = (2c,-c,c). Tomando c = 1, un vector director de "s" (hay infinitos) es **v** = (2,-1,1) y **la recta pedida en vectorial es s" en vectorial es (x,y,z) ≡ (1 + 2λ,1 - λ,-1 + λ)**.