**UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD CURSO 2011-2012.
MATEMÁTICAS II**

Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo Septiembre 2011

Sea la función continua f: R → R definidas por f(x) = $\begin{cases} x+k & si \quad x \le 0 \\ \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2} & si \quad x > 0 \end{cases}$.

(a) [1'25 puntos] Calcula el valor de *k*.
(b) [1'25 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto de abscisa x=1.

Solución

(a)
Calcula el valor de *k*.

Como la función es continua en R (nos lo dice el problema), es continua en x = 0.
Si f(x) es continua en x = 0, tenemos $f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$.

$f(0) = (0 + k) = k$; $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x + k) = (0 + k) = k$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2} = \{\dfrac{0}{0}$, aplicamos la Regla de L'Hopital $\} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{2x\cdot e^{x^2}}{2x}$ = {simplificando} =

$= \lim_{x\to 0^+} \dfrac{e^{x^2}}{1} = e^0 = 1$.

Igualando las tres expresiones tenemos **k = 1**.

(b)
Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto de abscisa x=1.

Nuestra función es f(x) = $\begin{cases} x+1 & si \quad x \le 0 \\ \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2} & si \quad x > 0 \end{cases}$.

Como nos piden la recta tangente en x = 1, la rama es $f(x) = \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}$.

La recta tangente es " y – f(1) = f'(1)(x – 1) "

$f(x) = \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}$, $f(1) = e^1 - 1$

$f'(x) = \dfrac{(2x\cdot e^{x^2})\cdot x^2 - (e^{x^2} - 1)\cdot 2x}{(x^2)^2}$, $f'(1) = 2.e^1.1 - (e^1 - 1).2 = 2e - 2e + 2 = 2$.

La recta tangente pedida es $\mathbf{y - (e^1 - 1) = 2(x - 1)}$

Ejercicio 2 opción A, modelo Septiembre 2012

Sea $I = \int_0^1 \dfrac{x}{1+\sqrt{1-x}}dx$.

(a) [1'75 puntos] Expresa la integral *I* aplicando el cambio de variable $t = \sqrt{1-x}$
(b) [0'75 puntos] Calcula el valor de *I*.

Solución

(a)
Expresa la integral *I* aplicando el cambio de variable $t = \sqrt{1-x}$

Calculamos 1º la integral indefinida

$I_1 = \int \dfrac{x}{1+\sqrt{1-x}}dx$

Cambio $t = \sqrt{1-x}$ → $t^2 = 1 - x$ → $x = 1 - t^2$ → dx = -2tdt. Sustituyendo, tenemos

$I_1 = \int \dfrac{1-t^2}{1+t} 2tdt$ = {diferencia de cuadrados} = $\int \dfrac{(1-t)(1+t)}{1+t}\cdot(-2t)dt$ = {simplificando} = $-2\cdot\int (t - t^2)dt$ =

$= -2(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}) = - t^2 + (2/3)t^3 =$ {quito cambio} $= -(\sqrt{1-x})^2 + (2/3)(\sqrt{1-x})^3 = -(1-x) + (2/3)(\sqrt{1-x})^3$

(b)

Calcula el valor de I.

$I = \int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{1-x}}dx = [-(1-x) + (2/3)(\sqrt{1-x})^3]_0^1 = (-(1-1) + (2/3)(\sqrt{1-1})^3) - (-(1-0) + (2/3)(\sqrt{1-0})^3) =$

$= 0 + 1 - 2/3 = 1/3.$

Ejercicio 3 opción A, modelo Septiembre 2012

Considera el siguiente sistema de ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{aligned} kx + 2y &= 2 \\ 2x + ky &= k \\ x - y &= -1 \end{aligned}$$

(a) [0'5 puntos] Prueba que el sistema es compatible para cualquier valor del parámetro k.

(b) [1 punto] Especifica para qué valores del parámetro k es determinado y para cuáles indeterminado.

(b) [1 punto] Halla las soluciones en cada caso

Solución

(a)

Prueba que el sistema es compatible para cualquier valor del parámetro k.

Sea A = $\begin{pmatrix} k & 2 \\ 2 & k \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, la matriz de los coeficientes y $A^* = \begin{pmatrix} k & 2 & 2 \\ 2 & k & k \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ la matriz ampliada.

Como observamos rango(A) $\le$ 2, puesto que sólo tiene dos columnas.

Para que el sistema sea compatible rango(A) = rango(A^*), por tanto rango(A^*) tiene que ser menor que 3, luego det(A^*) = $|A^*| = 0$.

$|A^*| = \begin{vmatrix} k & 2 & 2 \\ 2 & k & k \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_3+C_1 \\ C_3+C_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} k & k+2 & k+2 \\ 2 & k+2 & k+2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, por tener dos columnas iguales; luego rango(A) = rango(A^*), luego el sistema es compatible independientemente del valor de "k".

(b)

Especifica para qué valores del parámetro k es determinado y para cuáles indeterminado.

En A los menores de orden 2 son $\begin{vmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} k & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 2 & k \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix} = k^2 - 4$, si lo igualamos a 0 las soluciones son k = 2 y k = -2.

Si igualamos los otros dos determinantes a 0, la solución es k = -2.

Si **$k \ne 2$ y $k \ne -2$**, rango(A) = rango(A^*) = 2 = nº de incógnitas, luego el sistema es determinado.

Si **k = 2**, A = $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 -2 = -4 \ne 0$, luego rango(A) = rango(A^*) = nº de incógnitas, por tanto el sistema es determinado (recordamos que el determinante de A^* es 0).

Si **k = -2**, A = $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2+F_1 \\ F_3+(1/2)F_1 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, luego rango(A) = 1(la matriz sólo tiene una fila con elementos distintos de cero).

En A^* como $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F_2+F_1 \\ F_3+(1/2)F_1 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, luego rango($A^*$) = 1(la matriz sólo tiene una fila con elementos distintos de cero).
Como rango(A) = rango(A^*) < nº de incógnitas, por tanto el sistema es indeterminado.

(b)
Halla las soluciones en cada caso

Si **k ≠ 2, k ≠ -2 y k = 2**, rango(A) = rango(A^*) = 2 = nº de incógnitas, luego el sistema es determinado.
Veamos las soluciones, para lo cual elegimos sólo dos ecuaciones (la 2ª y 3ª).
2x + ky = k
x - y = -1

Lo resolvemos por Cramer, $x = \dfrac{\begin{vmatrix} k & k \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & k \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \dfrac{0}{-2-k} = 0$; $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & k \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & k \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \dfrac{-2-k}{-2-k} = 1$. Solución **(x,y) = (0,1)**, y se le diésemos a k el valor 2 saldría lo mismo.

Si **k = -2**, rango(A) = rango(A^*) = 1 < nº de incógnitas, por tanto el sistema es indeterminado. Sólo necesitamos una ecuación. Tomamos la 3ª

De x - y = -1 tenemos x = -1+y. Tomando y = $\lambda\in$R, x = -1+λ. Solución **(x,y) = (-1+λ,λ)**, con $\lambda\in$R.

Ejercicio 4 opción A, modelo Septiembre 2012

Sean los puntos A(0,0,1), B(1,0,-1), C(0,1,-2) y D(1,2,0).
(a) [1 punto] Halla la ecuación del plano π determinado por los puntos A, B y C.
(b) [0'5 puntos] Demuestra que los cuatro puntos no son coplanarios.
(c) [1 punto] Calcula la distancia del punto D al plano π.

Solución

(a)
Halla la ecuación del plano π determinado por los puntos A, B y C.

Para la ecuación del plano necesitamos un punto, el A(0,0,1), y dos vectores independientes, el **AB**=(1,0,-2) y **AC** = (0, 1,-3)

La ecuación general del plano es $\pi \equiv 0$ = det(**AX**, **AB**, **AC**) = $\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$ $\begin{matrix}\text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila}\end{matrix}$ = x(2) – y(-3) + (z-1)(1) =
= 2x + 3y + z – 1 = 0.
Su vector normal es **n** = (2,3,1).

(b)
Demuestra que los cuatro puntos no son coplanarios.

Para que los cuatro puntos no sean coplanarios, el punto D(1,2,0) no debe de pertenecer al plano π.
Como 2(1) + 3(2) + (0) – 1 = 0 $\rightarrow$ **7 = 0**, lo cual es absurdo, luego D no está en π y **los cuatro puntos no son coplanarios.**

(c)
Calcula la distancia del punto D al plano π.

Aplicando la fórmula d(D, π) = $\dfrac{|2(1)+3(2)+(0)-1\,|}{||\vec{n}||} = \dfrac{7}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}} = \dfrac{7}{\sqrt{14}}$ u^2.

german.jss@gmail.com

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo Septiembre 2012

Sea la función *f* definida por $f(x) = \frac{e^{-x}}{1 - x}$ para $x \neq 1$.

(a) [1'25 puntos] Estudia las asíntotas de la gráfica de la función *f*.
(b) [1'25 puntos] Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.

Solución

(a)

Estudia las asíntotas de la gráfica de la función $f(x) = \frac{e^{-x}}{1 - x}$.

La recta x = a es una asíntota vertical (A.V.) de f(x) si $\lim_{x\to a^+} [(f(x)] = \infty$

Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{e^{-x}}{1 - x} = [e^{-1}/0^+] = +\infty$ ($e^{-1} = 1/e > 0$); la recta **x = 1** es una A.V. de f(x).

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{e^{-x}}{1 - x} = [e^{-1}/0^-] = -\infty$

La recta y = b es una asíntota horizontal (A.H.) de f(x) si $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) = b$

Como $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{1 - x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x(1 - x)} = [1/-\infty] = 0$ la recta **y = 0** es una A.H. de f(x) en $+\infty$.

Como $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{+x}}{1 + x} = \{\infty/\infty$; aplicamos L'Hopital$\} = +\infty$, f(x) no tiene A.H. en $-\infty$.

Como tiene A.H., f(x) no tiene asíntota oblicua (A.O.)

Veamos la posición relativa

Como $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - 0)] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x(1 - x)} = [1/-\infty] = 0^-$, f(x) está por debajo de la A.H. en $+\infty$ (le damos a x el valor + 100)

(b)

Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.

Me están pidiendo la monotonía, que es el estudio de f '(x)

$f(x) = \frac{e^{-x}}{1 - x}$. Vemos que la función no está definida en x = 1

$$f'(x) = \frac{e^{-x}(-1)(1-x) - e^{-x}(-1)}{(1-x)^2} = \frac{e^{-x}(-1+x+1)}{(1-x)^2} = \frac{x\cdot e^{-x}}{(1-x)^2}$$

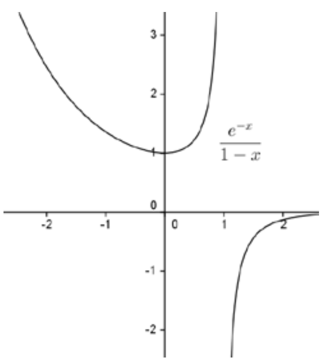
Si f '(x) = 0; $x\cdot e^{-x} = 0$, de donde x = 0 (e^{-x} es una exponencial y no se anula nunca).

Como $f'(-1) = -1\cdot e^{1}/(+) < 0$, $f'(x) < 0$ en $x < 0$, luego f(x) es estrictamente decreciente en $(-\infty,0)$.

Como $f'(2) = 2\cdot e^{-2}/(+) = (+)/(+) > 0$, $f'(x) > 0$ en $(0,+\infty)-\{1\}$, luego f(x) es estrictamente creciente en $(0,+\infty)-\{1\}$.

Por definición en x = 0 hay un mínimo relativo que vale $f(0) = e^0/1 = 1$.

Aunque no lo piden un esbozo de la gráfica es :



Ejercicio 2 opción B, modelo Septiembre 2012

Sea f: R → R la función definida por $f(x) = \frac{9 - x^2}{4}$

(a) [0'75 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto de abscisa x=1.
(b) [1'25 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de *f* , la recta x + 2y = 5 y el eje de abscisas. Calcula el área de dicho recinto.

Solución

(a)

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{9 - x^2}{4}$ en el punto de abscisa x = 1.

Sabemos que la recta tangente de f en x = 1 es " y – f(1) = f'(1).(x – 1)"

$f(x) = \frac{9 - x^2}{4}$, luego f(1) = 8/4 = 2

f'(x) = -2x/4 = -x/2, luego f'(1) = -1/2, por **la recta tangente es** y – 2 = (-1/2).(x - 1). Operando tenemos que la recta tangente es **y = -x/2 + 5/2**.

(b)

Esboza el recinto limitado por la gráfica de *f* , la recta x + 2y = 5 y el eje de abscisas. Calcula el área de dicho recinto.

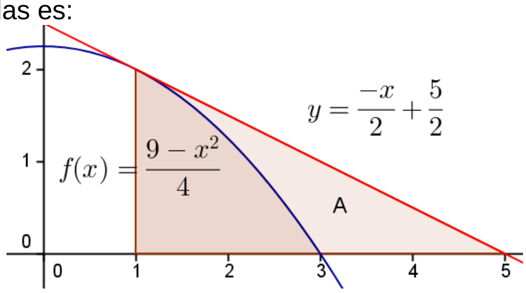
La gráfica de $f(x) = \frac{9 - x^2}{4}$ (a = -1/4, b = 0, c = 9/4), es la de una parábola muy parecida a "$-x^2$" (ramas hacia abajo y con vértice en (0,9/4) = (0, 2'25)), pero un poco más abierta (al estar multiplicada por 1/4) y desplazada "4" unidades hacia arriba en el eje OY, es decir el vértice lo tiene en (0,4).

Vemos que los cortes con el eje OX son (-3,0) y (3,0), porque de $9 - x^2 = 0$ obtenemos x = ±√(9) = ±3.

La recta x + 2y = 5 es y = -x/2 + 5/2, como hemos visto en el apartado anterior es la recta tangente en x=1.

Con dos puntos es suficiente para dibujarla. Para x = 1, y = 2; para y = 0, x = 5. Puntos (1,2) y (0,5)

Un esbozo de las gráficas pedidas es:



Donde me piden el área A, que vemos es el área del triángulo bajo la recta entre 1 y 5, menos el área bajo la parábola entre 1 y 3.

Área pedida A = (1/2)(5–1)(2) - $\int_1^3 \frac{9-x^2}{4}dx$ = 4–$[9x/4 – x^3/12]_1^3$ = 4–[(27/4 – 27/12) – (9/4 - 1/12)] = 5/3 u^2. ,

Ejercicio 3 opción B, modelo Septiembre 2012

Considera el sistema de ecuaciones con tres incógnitas.

$$x - y = \lambda$$
$$2\lambda y + \lambda z = \lambda$$
$$-x - y + \lambda z = 0$$

(a) [1'25 puntos] Clasifícalo según los distintos valores del parámetro λ.
(b) [1 punto] Resuélvelo para λ = 0 y λ = -1.

Solución

(a)

german.jss@gmail.com

Clasifícalo según los distintos valores del parámetro λ.

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2\lambda & \lambda \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \lambda \\ 0 & 2\lambda & \lambda & \lambda \\ -1 & -1 & \lambda & 0 \end{pmatrix}$.

Si det(A) = |A| $\neq$ 0, rango(A) = rango(A^*) = 3 = nº de incógnitas. El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2\lambda & \lambda \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila $= (1)(2\lambda^2+\lambda) - (-1)(\lambda) + 0 = 2\lambda^2+2\lambda \neq 0$,

Resolviendo la ecuación $2\lambda^2+2\lambda = 0 = 2\lambda(\lambda+1)$, obtenemos $\lambda = 0$ y $\lambda = -1$.

Si $\lambda \neq 0$ **y** $\lambda \neq -1$, det(A) = |A| $\neq$ 0, rango(A) = rango(A^*) = 3 = nº de incógnitas. **El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.**

Si **$\lambda = 0$**

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. A y A^* tienen el mismo rango porque la última columna de A^* es de ceros.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, tenemos rango(A) = 2 = rango(A^*) = 2 < nº de incógnitas, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

Si **$\lambda = -1$**

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, tenemos rango(A) =2.

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} F_2-F_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, por tener dos filas iguales, tenemos rango(A) =2.

Como rango(A) = rango(A^*) = 2 < nº de incógnitas, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

(b)

Resuélvelo para $\lambda = 0$ y $\lambda = -1$.

Para **$\lambda = 0$**, tenemos rango(A) = 2 = rango(A^*) = 2, por tanto sólo necesitamos 2 ecuaciones. (Tomo las del menor de A distinto de cero con el que hemos determinado el rango, es decir la 1ª y la 3ª).

x - y = 0
-x - y = 0. $E_2 - E_1 \rightarrow$ -2x = 0, de donde x = 0 e y = 0. Tomamos **z = a** $\in$ R, con lo cual la solución del sistema es **(x,y,z) = (0, 0, a)** con a $\in$ R.

Para **$\lambda = -1$**, tenemos rango(A) = 2 = rango(A^*) = 2, por tanto sólo necesitamos 2 ecuaciones. (Tomo las del menor de A distinto de cero con el que hemos determinado el rango, es decir la 1ª y la 2ª).

x - y = -1
-2y - z = -1. Tomamos **y = a** $\in$ R, con lo cual x = -1 + a y z = 1 – 2a, y la solución del sistema es **(x,y,z) = (-1+a, a, 1-2a)** con a $\in$ R.

german.jss@gmail.com

ejercicio 4 opción B, Septiembre 2012

[2'5 puntos] Halla el punto simétrico de P(2,1,-5) respecto de la recta r definida por

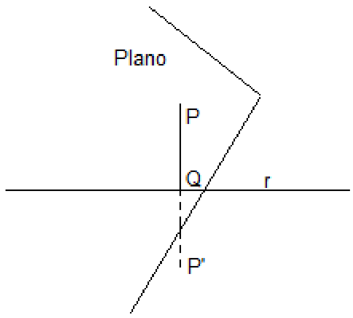
$$\begin{cases} x - z = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}.$$

Solución

Simétrico de P(2,1,-5) respecto de la recta r : $\begin{cases} x - z = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$.

De la recta tomo un punto, hacemos x = 0 y resulta z = 0 e y = -2, el punto sería A(0,-2,0) y un vector director **u** = $\mathbf{n_1}\mathbf{x}\mathbf{n_2}$ = {producto vectorial de los vectores normales de cada plano que forman la recta} =

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = \mathbf{i}(1) - \mathbf{j}(1) + \mathbf{k}(1) = (1,-1,1).$$ La recta en vectorial es (x,y,z) = (0,-2,0)+λ(1,-1,1).



Trazamos el plano "π" perpendicular a la recta "r" (su vector normal **n** puede ser el vector director de la recta, es decir **n** = **u** = (1,-1,1) que pase por el punto P(2,1,-5). Calculamos el punto Q intersección de la recta con el plano. El punto Q es el punto medio del segmento PP' donde P' es el simétrico buscado.

Un plano paralelo al pedido es x - y + z + K = 0. Como pasa por el punto P(2,1,-5) tenemos 2-1-5+K=0, de donde K = 4 y el plano "π" es x - y + z + 4 = 0.

Ponemos la recta "r" en paramétricas para sustituirla en el plano. "r" :(x,y,z) = (λ,-2-λ,λ).

Sustituimos "r" en "π"
(λ) – (-2-λ) + (λ) + 4 = 0 = 6 + 3λ = 0, de donde λ = -2 y el punto Q es Q((-2),-2-(-2),(-2)) = Q(-2, 0, -2)

Q es el punto medio del segmento PP', es decir (-2, 0, -2) = ((2+x)/2, (1+y)/2, (-5+z)/2).
Igualando tenemos
-2 = (2+x)/2, de donde x = -4 - 2 = -6
0 = (1+y)/2, de donde y = 0 – 1 = -1
-2 = (-5+z)/2, de donde z = -4 + 5 = 1
El punto simétrico pedido es P'(x,y,z) = P'(-6, -1, 1)

german.jss@gmail.com