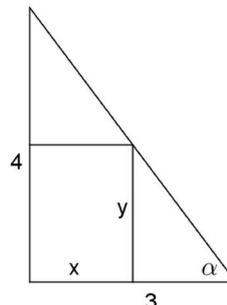
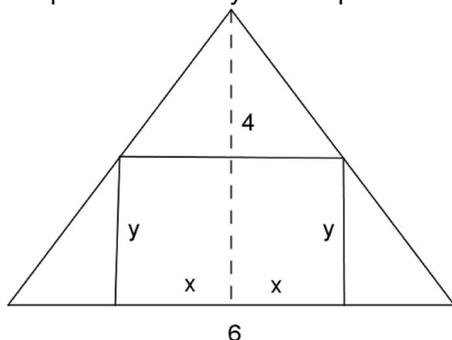


Opción A**Ejercicio 1 opción A, modelo 1 Junio 2013, específico 2**

[2'5 puntos] Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en un triángulo isósceles de 6 metros de base (el lado desigual) y 4 metros de alto.

Solución

Es un problema de optimización. Leyendo el problema tenemos las siguientes figuras:



La función a maximizar es Área = $A(x,y) = 2x \cdot y$

Relación entre variables: $\tan(\alpha) = 4/3$ (Triángulo grande) = $y/(3-x)$ [triángulo pequeño], de donde obtenemos $y/(3-x) = 4/3$, por tanto $y = (12 - 4x)/3$ luego $A(x) = 2x \cdot y = 2x \cdot (12 - 4x)/3 = (24x - 8x^2)/3$.

$$A'(x) = (1/3) \cdot (24 - 16x)$$

De $A'(x) = 0$, tenemos $24 - 16x = 0$, es decir $x = 3/2 = 1'5$.

Luego el rectángulo tiene de base $2x = 3$ m. y de altura $y = (12 - 4(1'5))/3 = 2$ m.

Veamos que es un máximo, es decir $A''(1'5) < 0$

$$A''(x) = (1/3) \cdot (-16) = -16/3 < 0, \text{ independientemente del valor de "x", luego es un máximo.}$$

Ejercicio 2 opción A, modelo 1 Junio 2013, específico 2

Sean f y g las funciones definidas por $f(x) = 2 - x$ y $g(x) = \frac{2}{x+1}$ para $x \neq -1$.

- [0'5 puntos] Calcula los puntos de corte entre las gráficas de f y g .
- [0'5 puntos] Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes.
- [1'5 puntos] Halla el área del recinto limitado por las gráficas de f y g .

Solución

Sean f y g las funciones definidas por $f(x) = 2 - x$ y $g(x) = \frac{2}{x+1}$ para $x \neq -1$.

a)

Calcula los puntos de corte entre las gráficas de f y g .

Igualamos ambas funciones y resolvemos la ecuación que nos quede.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2 - x = \frac{2}{x+1} \Rightarrow (2-x)(x+1) = 2 \Rightarrow -x^2 + x + 2 = 2 \Rightarrow -x^2 + x = 0 = x(-x+1), \text{ de donde tenemos}$$

las soluciones $x = 0$ y $x = 1$

b)

Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes.

Sabemos que la gráfica de f es una recta, y con dos puntos es suficiente. El $(0,2)$ y el $(1,1)$.

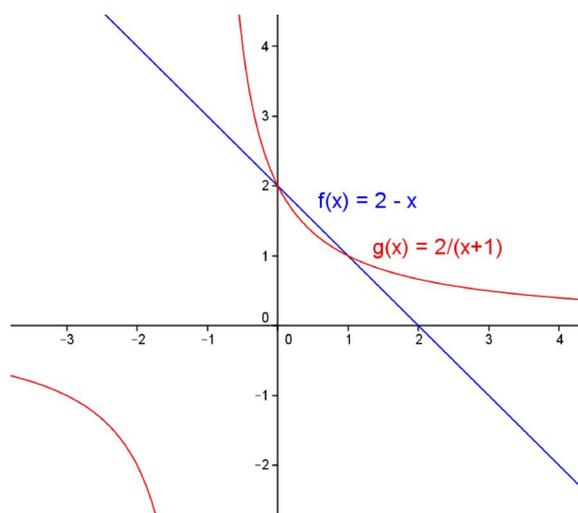
La gráfica de g es un hipérbola luego está enfrentada respecto a sus asíntotas.

Como $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2}{x+1} = 2/0^+ = +\infty$ la recta $x = -1$ es una asíntota vertical de g

Como $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x+1} = 2/(\pm\infty) = 0$, la recta $y = -1$ es una asíntota horizontal (A.H.) de g . En $+\infty$ g está por encima

de $y=0$ (A.H.), y en $-\infty$, g está por debajo de $y = 0$ (A.H.).

Sabemos que pasa por $(0,2)$, $(1,1)$ y el $(-2,-2)$. Con estos datos es suficiente para dibujarla



c)

Halla el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

Ya hemos calculado los puntos de corte de f con g que son $x = 0$ y $x = 1$, luego el área pedida es:
 Área = $\int_0^1 (f(x) - g(x)) \cdot dx = \int_0^1 (2-x - 2/(x+1)) \cdot dx = [2x - x^2/2 - 2\ln(x+1)]_0^1 = (2 - 1/2 - 2\ln(2)) - (0-0-0) = 3/2 - 2\ln(2) \cong 0'1137 \text{ u}^2$.

Ejercicio 3 opción A, modelo 1 Junio 2013, específico 2

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{aligned}x + 2y + z &= 0 \\x - y + mz &= m - 2 \\mx + y + 3z &= m - 2\end{aligned}$$

a) [1'75 puntos] Discute el sistema según los valores del parámetro m.

b) [0'75 puntos] Resuélvelo, si es posible, para $m = 2$.

Solución

a)

Discute el sistema según los valores del parámetro m.

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & m \\ m & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & m & m-2 \\ m & 1 & 3 & m-2 \end{pmatrix}$.

Si $\det(A) = |A| \neq 0$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3 = n^\circ$ de incógnitas. El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & m \\ m & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{array} = (1)(-3-m) - (2)(3-m^2) + (1)(1+m) = -3 - m - 6 + 2m^2 + 1 + m = 2m^2 - 8.$$

Resolviendo la ecuación $2m^2 - 8 = 0$, obtenemos $m = -2$ y $m = 2$.

Si $m \neq -2$ y $m \neq 2$, $\det(A) = |A| \neq 0$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3 = n^\circ$ de incógnitas. **El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.**

Si $m = -2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A) = 2$.

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & -4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{array} = (1)(4+4) - (2)(-4-8) = 8 + 24 = 32 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A^*) = 3$. Como

$\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3$, **el sistema es incompatible y no tiene solución.**

Si $m = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A) = 2$.

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, por tener una columna de ceros tenemos $\text{rango}(A^*) = 2$. Como $\text{rango}(A) =$

$= \text{rango}(A^*) = 2 <$ número de incógnitas, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

b)

Resuélvelo, si es posible, para $m = 2$.

Hemos visto en el apartado anterior que si $m = 2$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2$, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

Como el rango es 2, sólo necesitamos 2 ecuaciones. (Tomo las del menor de A distinto de cero con el que hemos determinado el rango, es decir la 1ª y la 2ª).

$$x + 2y + z = 0 \quad \rightarrow \quad x + 2y + z = 0$$

$x - y + 2z = 0. F_2 - F_1 \rightarrow -3y + z = 0$. Tomo $y = a \in \mathbb{R}$, de donde $z = 3a$, y entrando en la 1ª ecuación tenemos $x + 2(a) + (3a) = 0 \rightarrow x = 5a$

Solución $(x,y,z) = (5a, a, 3a)$ con $a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4 opción A, modelo 1 Junio 2013, específico 2

[2'5 puntos] Determina el punto de la recta $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z + 1$ que equidista de los planos

$$\pi_1 \equiv x - y + 3z + 2 = 0 \quad \text{y} \quad \pi_2 \equiv \begin{cases} x = -4 + \lambda - 3\mu \\ y = 1 + \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

Solución

Ponemos el plano π_2 en su forma general $\det(\mathbf{x}-\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$, donde $\mathbf{a} = (-4, 1, 0)$, $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$ y $\mathbf{v} = (-3, 0, 1)$.

$$\pi_2 \equiv \det(\mathbf{x}-\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 = \begin{vmatrix} x+4 & y-1 & z \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{array} = (x+4)(1) - (y-1)(1) + (z)(3) = x - y + 3z + 5 = 0.$$

Sabemos que la distancia de un punto $P(p_1, p_2, p_3)$ a un plano $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$ es

$$d(P, \pi) = \frac{|a(p_1) + b(p_2) + c(p_3) + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \text{ donde } | \cdot | \text{ es el valor absoluto.}$$

Ponemos la recta "r" en forma vectorial, para lo cual necesitamos un punto suyo, el B y un vector director, el \mathbf{w} .

Como "r" $\equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z + 1$, un punto de la recta es el B(1,0,-1) y un vector director es $\mathbf{w} = (3, 2, 1)$.

La recta en forma vectorial es "r" $\equiv (x, y, z) = (1+3\delta, 2\delta, -1+\delta)$, con δ un número real cualquiera.

Un punto genérico de la recta "r" es $X = (1+3\delta, 2\delta, -1+\delta)$.

Como me piden los puntos de "r" que equidistan de π_1 y π_2 , tengo que resolver la ecuación:

$$d(X, \pi_1) = d(X, \pi_2), \text{ con } X \text{ punto genérico de "r".}$$

Recuerdo que $\pi_1 \equiv x - y + 3z + 2 = 0$, $\pi_2 \equiv x - y + 3z + 5 = 0$ y $X = (1+3\delta, 2\delta, -1+\delta)$.

Observamos que los planos son paralelos pues tienen el mismo vector normal $(1, -1, 3)$.

$$d(X, \pi_1) = \frac{|(1+3\delta) - (2\delta) + 3(-1+\delta) + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{|4\delta|}{\sqrt{11}}$$

$$d(X, \pi_1) = \frac{|(1+3\delta) - (2\delta) + 3(-1+\delta) + 5|}{\sqrt{1^2+1^2+3^2}} = \frac{|4\delta+3|}{\sqrt{11}}$$

Igualando tenemos $\frac{|4\delta|}{\sqrt{11}} = \frac{|4\delta+3|}{\sqrt{11}}$, es decir $|4\delta| = |4\delta+3|$, de donde salen dos ecuaciones:

$(4\delta) = +(4\delta+3)$, de donde $0 = 3$, **lo cual es absurdo.**

$(4\delta) = -(4\delta+3)$, de donde $8\delta = -3$, es decir $\delta = -3/8$, y el punto de la recta que equidista de ambos planos es $X(1+3(-3/8), 2(-3/8), -1+(-3/8)) = X(-1/8, -6/8, -11/8)$.

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo 1 Junio 2013, específico 2

Sea f la función definida por $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ para $x \geq -1$, $x \neq 0$.

a) [1 punto] Calcula los límites laterales de f en $x = 0$.

b) [1'5 puntos] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f .

Solución

Sea f la función definida por $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ para $x \geq -1$, $x \neq 0$.

a)

Calcula los límites laterales de f en $x = 0$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = 0 \cdot e^{+\infty} = 0 \cdot e^{+\infty} = 0 \cdot (+\infty)$. Indeterminación.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1/x} = \{+\infty/+\infty; \text{le aplicamos L'Hôpital (L'H)}\} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(-1/x^2)e^{\frac{1}{x}}}{(-1/x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{+\infty} = e^{+\infty} = +\infty.$$

Luego $x = 0$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de f .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = 0 \cdot e^{0^-} = 0 \cdot e^{-\infty} = 0 \cdot \frac{1}{e^{+\infty}} = 0 \cdot \frac{1}{+\infty} = 0 \cdot 0 = 0.$$

b)

Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f .

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, **la recta $x = 0$ es una asíntota vertical de f**

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = +\infty \cdot e^{+\infty} = +\infty \cdot e^0 = +\infty \cdot 1 = +\infty$, la función f **no tiene asíntota horizontal** (A.H.) en $+\infty$.

Como la función está definida a partir de $x \geq -1$, no podemos hacer el estudio en $-\infty$.

Veamos si tiene asíntota oblicua (A.O.) $y = mx + n$, con $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx)$.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{+\infty}} = e^0 = 1.$$

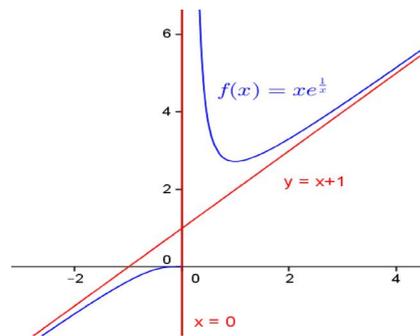
$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot e^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = \{+\infty \cdot 0\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{1/x} = \{0/0; \text{L'H}\} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-1/x^2)e^{\frac{1}{x}}}{(-1/x^2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{+\infty}} = e^0 = 1.$$

La A.O. en $+\infty$ es la recta $y = mx + n = x + 1$.

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x) - \text{A.O.}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \cdot e^{\frac{1}{x}} - x - 1 \right) = 0^+$, la gráfica de f está por encima de la A.O. en $+\infty$.

Aunque no me lo piden un esbozo de la gráfica de f es:



Ejercicio 2 opción B, modelo 1 Junio 2013, específico 2

[2'5 puntos] Calcula $\int_2^4 \frac{e^x}{1 + \sqrt{e^x}} \cdot dx$. *Sugerencia:* se puede hacer el cambio de variable $t = \sqrt{e^x}$

Solución

Calculamos primero la integral indefinida

$I = \int \frac{e^x}{1 + \sqrt{e^x}} dx$ Nos dan el cambio $t = \sqrt{e^x}$, es decir $t^2 = e^x$, luego $2t \cdot dt = e^x dx$, y sustituyendo nos queda

$I = \int \frac{2t}{1+t} dt$, que es una integral racional. Dividimos y descomponemos en factores simples el denominador si hiciese falta.

$$\frac{2t}{-2t - 2} = \frac{t+1}{2} + \frac{-2}{-2}$$

Recordamos que $I = \int (C(t) + R(t)/(\text{div}(t))) dt = \int 2dt + \int \frac{-2}{t+1} dt = 2t - 2 \cdot \ln|t+1| = \{ \text{quito el cambio } t = \sqrt{e^x} \} =$

$$= 2\sqrt{e^x} - 2 \cdot \ln|\sqrt{e^x} + 1|.$$

La integral pedida es $\int_2^4 \frac{e^x}{1 + \sqrt{e^x}} \cdot dx = \left[2\sqrt{e^x} - 2 \ln|\sqrt{e^x} + 1| \right]_2^4 =$

$$= \left(2\sqrt{e^4} - 2 \ln|\sqrt{e^4} + 1| \right) - \left(2\sqrt{e^2} - 2 \ln|\sqrt{e^2} + 1| \right) \cong 7'714215894.$$

Ejercicio 3 opción B, modelo 1 Junio 2013, específico 2

Sea M una matriz cuadrada de orden 3 tal que su determinante es $\det(M) = 2$. Calcula:

- [0'5 puntos] El rango de M^3 .
- [0'75 puntos] El determinante de $2M^t$ (M^t es la matriz traspuesta de M).
- [0'75 puntos] El determinante de $(M^{-1})^2$.
- [0'5 puntos] El determinante de N, donde N es la matriz resultante de intercambiar la primera y segunda filas de M.

Solución

Sabemos que si A y B son cuadradas entonces, $\det(A) = |A|$, $|AB| = |A||B|$, $|A^{-1}| = 1/|A|$ (de $A \cdot B = I$, y $|I|=1$), $|k \cdot A_n| = k^n \cdot |A|$, $|A^t| = |A|$, y si $|B_3| \neq 0$, $\text{rango}(B) = 3$.

Sea M una matriz cuadrada de orden 3 tal que su determinante es $\det(M) = 2$. Calcula:

- El rango de M^3 .
Como $|M^3| = |M \cdot M \cdot M| = |M| \cdot |M| \cdot |M| = (2)^3 = 8 \neq 0$, tenemos que $\text{rango}(M^3) = 3$.
- El determinante de $2M^t$ (M^t es la matriz traspuesta de M).
 $|2M^t| = (2)^3 \cdot |M^t| = 8 \cdot |M| = (8)(2) = 16$.
- El determinante de $(M^{-1})^2$.
 $| (M^{-1})^2 | = |(M^{-1}) \cdot (M^{-1})| = |(M^{-1})| \cdot |(M^{-1})| = (1/|M|) \cdot (1/|M|) = (1/|M|)^2 = 1/2^2 = 1/4$.
- El determinante de N, donde N es la matriz resultante de intercambiar la primera y segunda filas de M.

Sabemos que si cambiamos dos filas (columnas) entre si el determinante cambia de signo
 $|N| = - |M| = -2$.

Ejercicio 4 opción B, modelo 1 Junio 2013, específico 2

Considera los puntos $A(0,5,3)$, $B(-1,4,3)$, $C(1,2,1)$ y $D(2,3,1)$.

- a) [1'75 puntos] Comprueba que los cuatro puntos son coplanarios y que ABCD es un rectángulo.
 b) [0'75 puntos] Calcula el área de dicho rectángulo.

Solución

Considera los puntos $A(0,5,3)$, $B(-1,4,3)$, $C(1,2,1)$ y $D(2,3,1)$.

a)

Comprueba que los cuatro puntos son coplanarios y que ABCD es un rectángulo.

Para ver si son coplanarios, con los puntos A B y C formamos un plano y después comprobamos si el punto D pertenece a dicho plano.

La ecuación del plano está determinada por un punto, el $A(0,5,3)$, y dos vectores independientes, el

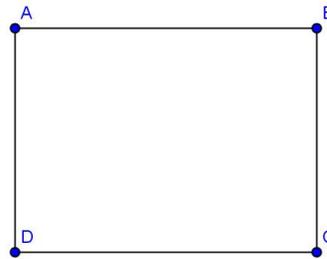
$\mathbf{AB} = (-1,-1,0)$ y $\mathbf{AC} = (1, -3,-2)$

La ecuación general del plano es $\pi \equiv 0 = \det(\mathbf{AX}, \mathbf{AB}, \mathbf{AC}) = \begin{vmatrix} x & y-5 & z-3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$ Adjuntos
 primera = $x(2)-(y-5)(2) + (z-3)(4) =$
 fila

$= 2x - 2y + 4z - 2 = 0$.

Como $2(2) - 2(3) + 4(1) - 2 = 0$, el punto $D(2,3,1)$ pertenece al plano $\pi \equiv 2x - 2y + 4z - 2 = 0$, y los cuatro puntos son coplanarios.

Viendo la figura



ABCD es un rectángulo si los vectores \mathbf{AB} y \mathbf{DC} son iguales, y además \mathbf{AB} es perpendicular (\perp) al \mathbf{BC} .

$A(0,5,3)$, $B(-1,4,3)$, $C(1,2,1)$ y $D(2,3,1)$.

$\mathbf{AB} = (-1,-1,0)$, $\mathbf{DC} = (-1,-1,0)$, luego $\mathbf{AB} = \mathbf{DC}$

\mathbf{AB} es \perp al \mathbf{BC} si $\mathbf{AB} \cdot \mathbf{BC} = 0$ (producto escalar \bullet)

$\mathbf{AB} = (-1,-1,0)$, $\mathbf{BC} = (2,-2,-2)$. $\mathbf{AB} \cdot \mathbf{BC} = (-1,-1,0) \cdot (2,-2,-2) = -2 + 2 + 0 = 0$, luego son perpendiculares y la figura ABCD es un rectángulo.

b)

Calcula el área de dicho rectángulo. Sabemos que el área de un rectángulo es la base por la altura, es decir

Área = $\|\mathbf{DC}\| \cdot \|\mathbf{BC}\| = \sqrt{1^2+1^2+0^2} \sqrt{2^2+2^2+2^2} = \sqrt{2} \sqrt{12} = \sqrt{24} \text{ u}^2$.