Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo 3 Septiembre 2013 específico 1

Sea f la función definida por f(x) = $\frac{x}{\ln(x)}$ para x > 0, x ≠ 1 (donde ln denota el logaritmo neperiano).

a) [1'25 puntos] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f .
b) [1'25 puntos] Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = e.

Solución

Sea f la función definida por f(x) = $\frac{x}{\ln(x)}$ para x > 0, x ≠ 1 (donde ln denota el logaritmo neperiano).

a)
Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f .

[La regla de L'Hôpital (L'H) nos dice que si las funciones f(x) y g(x) son continuas y derivables en un entorno de "a", f(a) = g(a) = 0 y existe $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. La regla se puede reiterar, y se puede aplicar si sale 0/0, ∞/∞, y si el límite tiende a ∞]
Asíntotas verticales (A.V.)

Como $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\ln(x)} = \frac{0}{-\infty} = 0.\frac{1}{-\infty} = 0.0 = 0$, la función f **no tiene A.V. en x = 0**.

Como $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{x}{\ln(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$, la función f **tiene A.V. en x = 1**.

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\frac{x}{\ln(x)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$,

Asíntotas horizontales (A.H.)

Como $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}, L'H\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1/x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, la función f **no tiene A.H. en + ∞**

Asíntotas oblicuas (A.O.)

La función f tiene una A.O. y = mx + n, si m = $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ y n = $\lim_{x\to\infty}(f(x) - mx)$

m = $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x.\ln(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\ln(x)} = \frac{1}{+\infty} = 0$, la función f **no tiene A.O. en + ∞**

Como n = $\lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, f tiene una rama parabólica.

b)
Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = e.

Recta tangente en x = e es y - f(e) = f '(e)(x – e)
Recta normal en x = e es y - f(e) = (-1/f '(e))·(x – e)

f(x) = $\frac{x}{\ln(x)}$, luego f(e) = e/1 = e.

f '(x) = $\frac{\ln(x) - x.(1/x)}{(\ln(x))^2} = \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}$, , luego f '(e) = (1 - 1)/e^2 = 0.

La recta tangente pedida es y – (e) = 0·(x – e), de donde y = e.
La recta normal pedida es y – (e) = (-1/0)·(x – e), de donde x = e.

Ejercicio 2 opción A, modelo 3 Septiembre 2013 específico 1

[2'5 puntos] Sea g : (0, +∞) → R la función definida por g(x) = $\frac{1}{x + \sqrt{x}}$.

Determina la primitiva de g cuya gráfica pasa por el punto P(1,0). *Sugerencia*: se puede hacer el cambio de variable t = $\sqrt{x}$.

Solución

Una primitiva de g es I = G(x) = ∫g(x)·dx

I = G(x) = ∫g(x)·dx = $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$. Nos dan el cambio t = $\sqrt{x}$, es decir t^2 = x, luego 2t·dt = dx, y sustituyendo nos queda I = $\int \frac{2t}{t^2+t}dt$, que es una integral racional.

I = $\int \frac{2t}{t^2+t}dt = \int \frac{2t}{t(t+1)}dt$ = {simplifico "t"} = $\int \frac{2}{t+1}dt$ = 2·ln|t + 1| + K = {quito el cambio $t=\sqrt{x}$ } =
= **I = G(x) = 2·ln|** $\sqrt{x}$ **+ 1| + K**.

Como G(x) pasa por el punto (1,0), tenemos G(1) = 0, es decir 2·ln| $\sqrt{1}$ + 1| + K = 0, de donde obtenemos K = -2·ln(2), y nuestra primitiva es **G(x) = 2·ln|** $\sqrt{x}$ **+ 1| - 2·ln(2)**
.

Ejercicio 3 opción A, modelo 3 Septiembre 2013 específico 1

Sean A = $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & m & m-2 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y X = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

a) [1'25 puntos] Determina el rango de A según los valores del parámetro m.
b) [0'75 puntos] Discute el sistema AX = B según los valores del parámetro m.
c) [0'5 puntos] Resuelve el sistema AX = B para m = 1.

Solución

Sean A = $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & m & m-2 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y X = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

a)
Determina el rango de A según los valores del parámetro m.

La matriz A es de orden 3x3, y sabemos que los vectores fila son linealmente independientes si sólo si (sii) el determinante (det ó | |) de la matriz M es distinto de cero, en cuyo caso el rango sería 3.

Calculamos el determinante desarrollando por el adjunto de la primera fila.

|A| = $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & m & m-2 \\ m & 0 & 2 \end{vmatrix}$ Ajuntos tercera fila = m·(m-2+3m) – 0 + (2)(-2m +1) = $4m^2$ – 2m - 4m + 2 = $4m^2$ - 6m + 2.

Igualando a cero tenemos 0 = $4m^2$ - 6m + 2 = $2m^2$ - 3m + 1, de donde m = 1 y m = 1/2.
Por tanto si m ≠ 1 y m ≠ 1/2, |A| ≠ 0 y rango(A) = 3.

Si **m = 1** tenemos A = $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ = -2 + 1 = -1 ≠ 0, tenemos **rango(A) = 2.**

Si **m = 1/2** tenemos A = $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1/2 & -3/2 \\ 1/2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} -1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{vmatrix}$ = 0 – 1/4 = -1/4 ≠ 0, tenemos **rango(A) = 2.**

b)
Discute el sistema AX = B según los valores del parámetro m.

La matriz de los coeficientes es A = $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & m & m-2 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}$, y la matriz ampliada es A^* = $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & m & m-2 & 1 \\ m & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, le hemos añadido a la matriz A la matriz columna B.

Hemos visto en el apartado anterior:

$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & m & m-2 \\ m & 0 & 2 \end{vmatrix}$ Ajuntos tercera fila $= m\cdot(m-2+3m) - 0 + (2)(-2m+1) = 4m^2 - 2m - 4m + 2 = 4m^2 - 6m + 2$.

Igualando a cero tenemos $0 = 4m^2 - 6m + 2 = 2m^2 - 3m + 1$, de donde m = 1 y m = 1/2.

Por tanto si $m \neq 1$ y $m \neq 1/2$, $|A| \neq 0$ y rango(A) = 3 = rango (A^*), por tanto el sistema tiene solución única.

Si **m = 1** tenemos $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, y $A^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,.

En A como $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$, tenemos **rango(A) = 2.**

En A^* como $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, por tener dos columnas iguales tenemos rango(A*) = 2. Como **rango(A) = = rango(A^*) = 2 < nº de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

Si **m = 1/2** tenemos $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1/2 & -3/2 \\ 1/2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1/2 & -3/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} -1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1/4 = -1/4 \neq 0$, tenemos **rango(A) = 2.**

En A^* como $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ Ajuntos tercera fila $= (1/2)(1-1/2) = 1/4 \neq 0$, tenemos **rango(A*) = 3.** Como **rango(A) = 2 ≠ ≠ rango(A^*) = 3, el sistema es incompatible y no tiene solución.**

c)

Resuelve el sistema AX = B para m = 1.

Por el apartado anterior hemos visto que si **m = 1, rango(A) = rango(A^*) = 2 < nº de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

Tomamos sólo dos ecuaciones, las dos últimas, que son con las que hemos formado el menor de A distinto de cero (nos fijamos en las dos últimas filas de la matriz ampliada A^*).

$-x + y - z = 1$

$x \quad + 2z = 0$. Hacemos $z = \lambda \in R$, con lo cual $x = -2\lambda$ e $y = 1 - 2\lambda + \lambda = 1 - \lambda$.

Solución del sistema $(x,y,z) = (-2\lambda, 1 - \lambda, \lambda)$, con $\lambda \in R$.

Ejercicio 4 opción A, modelo 3 Septiembre 2013 específico 1

Considera los puntos A(1,2,1), B(−1,0,2) y C(3,2,0) y el plano π determinado por ellos.

a) [1'75 puntos] Halla la ecuación de la recta r que está contenida en π y tal que A y B son simétricos respecto de r.

b) [0'75 puntos] Calcula la distancia de A a r.

Solución

Considera los puntos A(1,2,1), B(−1,0,2) y C(3,2,0) y el plano π determinado por ellos.

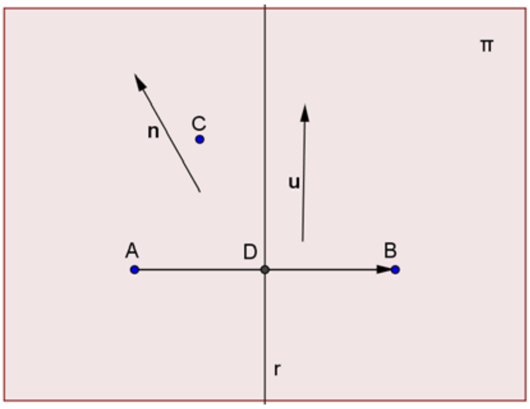
a)

Halla la ecuación de la recta r que está contenida en π y tal que A y B son simétricos respecto de r.

b)

Calcula la distancia de A a r.

Vamos a realizar un pequeño dibujo que nos servirá para los dos apartados.



Al ser A y B son simétricos respecto de r, su punto medio D pertenece a la recta "r", D(0, 1, 3/2).
Al ser A y B son simétricos respecto de r, el vector director **u** de "r" es perpendicular (⊥) al vector **AB**, por tanto **u•AB** = 0 (• es el producto escalar).
Como la recta "r" está contenida en el plano "π", el vector director **u** de "r" es perpendicular (⊥) al vector normal **n** del plano "π", por tanto **u•n** = 0.
Al ser A y B son simétricos respecto de r, la distancia del punto A a la recta "r", es la mitad de la longitud del segmento AB.

"π" es el plano determinado por los puntos A, B y C. Un vector normal es el producto vectorial (x) de los vectores **AB** = (-2,-2,1) y **AC** = (2,0,-1).

$\mathbf{n_1} = \mathbf{AB}\times\mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(2) - \mathbf{j}(0) + \mathbf{k}(4) = (2,0,4)$. Otro vector normal "π" de es **n** = (1,0,2).

La recta "r" está determinada por el punto D(0, 1, 3/2) y el vector director **u** = (a,b,c).
Como **u•AB** = 0, tenemos (a,b,c)•(-2,-2,1) = 0 = -2a – 2b + c = 0
Como **u•n** = 0, tenemos (a,b,c)•(1,0,2) = 0 = a + 0 + 2c = 0, de donde **a = -2c.** Entrando con este valor en la ecuación -2a – 2b + c = 0, tenemos -2(-2c) – 2b + c = 0, de donde **b = 5c/2.**
El vector director **u** de la recta "r" es **u** = (a,b,c) = (-2c,5c/2,c). Como hay infinitos vectores, tomo uno de ellos tomando c = 2, luego **u = (-4,5,2).**

La recta "r" pedida, tiene de ecuación continua: $r \equiv \dfrac{x}{-4} = \dfrac{y-1}{5} = \dfrac{z-3/2}{2}$.

Ya he dicho que la distancia del punto A a la recta "r" es la mitad del segmento AB, luego:

$d(A;r) = (||\mathbf{AB}||)/2 = \dfrac{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{9}}{2} = \dfrac{3}{2}\ u^2$.

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo 3 Septiembre 2013 específico 1

Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{k}{(x-a)(2x-1)}$ para $x \neq a$ y $x \neq 1/2$.

a) [1 punto] Halla a y k sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto (0,2) y que la recta x = 2 es una asíntota de dicha gráfica.

b) [1'5 puntos] Para k = 4 y a = 2, halla los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

Solución

Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{k}{(x-a)(2x-1)}$ para $x \neq a$ y $x \neq 1/2$.

a)
Halla a y k sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto (0,2) y que la recta x = 2 es una asíntota de dicha gráfica.

Como f pasa por (0,2) $\rightarrow f(0) = 2 \rightarrow \dfrac{k}{(-a)(-1)} = 2 \rightarrow$ **k = 2a.** Tenemos $f(x) = \dfrac{2a}{(x-a)(2x-1)}$

"La recta x = a es una asíntota vertical (A.V.) de f(x) si $\lim_{x\to a^+} [\,(f(x)\,] = \infty$"

Las A.V. en cocientes de funciones polinómicas suelen ser los números que anulan el denominador, en este caso x = a y x = 1/2, por tanto a = 2, puesto que x = 2 es una A.V. Veamos que el límite es infinito:

Nuestra función sería $f(x) = \dfrac{2(2)}{(x-2)(2x-1)} = \dfrac{4}{(x-2)(2x-1)}$

Como $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{4}{(x-2)(2x-1)} = \dfrac{4}{(0^+)(4-1)} = \dfrac{4}{0^+} = +\infty$, la recta **x = 2 es una A.V. de f**

$\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{4}{(x-2)(2x-1)} = \dfrac{4}{(0-)(4-1)} = \dfrac{4}{0^-} = -\infty$.

Por tanto a = 2 y k = 4.

b)

Para k = 4 y a = 2, halla los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

Me están pidiendo la monotonía, que es el estudio de f '(x), siendo $f(x) = \dfrac{4}{(x-2)(2x-1)}$ para $x \neq 2$ y $x \neq 1/2$.

$f(x) = \dfrac{4}{(x-2)(2x-1)} = \dfrac{4}{2x^2-5x+2}$

$f'(x) = \dfrac{0-4(4x-5)}{(2x^2-5x+2)^2} = \dfrac{-16x+20}{(2x^2-5x+2)^2}$.

Si f '(x) = 0; tenemos – 16x + 20 = 0, de donde **x = 20/16 = 5/4 = 1'25**, que puede ser el extremo relativo.

Como $f'(0) = \dfrac{20}{(+)} > 0$, f'(x) > 0 en (-∞,1'25) – {1/2}, **luego f(x) es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en (-∞,1'25) – {1/2}.**

Como $f'(3) = \dfrac{-28}{(+)} < 0$, f'(x) < 0 en (1'25,+ ∞) – {2}, **luego f(x) es estrictamente decreciente** $(\searrow)$ **en (1'25,+ ∞) – {2}.**

Por definición **x = 5/4 = 1'25 es un máximo relativo** de f **que vale f(5/4)** = $\dfrac{4}{(5/4-2)(2(5/4)-1)}$ **= -39/2** $\cong$ **-3'56**

Ejercicio 2 opción B, modelo 3 Septiembre 2013 específico 1

[2'5 puntos] Calcula $\int_0^{\pi/2} x\cdot \text{sen}(2x)dx$.

Solución

Calculamos primero la integral indefinida I = ∫ x·sen(2x)·dx, que es una integral por partes.

∫ u·dv = u·v -∫ v·du

Calculamos primero la integral indefinida.

I = ∫ x· sen(2x)·dx = { u = x → du = dx; dv = sen(2x)·dx → v = ∫ sen(2x)·dx = (-cos(2x))/2 } =
= x·(-cos(2x))/2 - ∫ (-cos(2x))/2·dx = -(1/2)·x·cos(2x) + (1/2)∫cos(2x)·dx = -(1/2)·x·cos(2x) + (1/4)·sen(2x) + K.

Luego la integral pedida es $\int_0^{\pi/2}$ **x·sen(2x)·dx** = [-(1/2)·x·cos(2x) + (1/4)·sen(2x) + K $]_0^{\pi/2}$ =
= (-(1/2)·(π/2)·cos(π) + (1/4)·sen(π) + K) - (-(1/2)·(0)·cos(0) + (1/4)·sen(0) + K) = -(1/2)·(π/2)·(-1) **= π/4.**

Ejercicio 3 opción B, modelo 3 Septiembre 2013 específico 1

Sean A y B las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$.

a) [1'25 puntos] Calcula las matrices X e Y para las que 2X − Y = A y X − 3Y = B.

b) [1'25 puntos] Halla la matriz Z que verifica $B^2 + ZA + B^t = 3I$ (I denota la matriz identidad y B^t la matriz traspuesta de B).

Solución

Sean A y B las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$.

a)

Calcula las matrices X e Y para las que 2X − Y = A y X − 3Y = B.
2X − Y = A ($F_1 – 2F_2$) → 5Y = A – 2B → **Y = (1/5)·(A – 2B)**
X − 3Y = B → X − 3Y = B → **X** = 3·((1/5)·(A – 2B)) + B = (3/5)·(A – 2B) + B =
= (3/5)A - (6/5)B + B = (3/5)A - (1/5)B = (**1/5)·(3A - B).**
Las matrices pedidas son:

$$\mathbf{X} = (\mathbf{1/5})\cdot(\mathbf{3A - B}) = (1/5)\cdot\left(3.\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}\right) = (1/5)\cdot\left(\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -9 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}\right) = (1/5)\cdot\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{1/5})\cdot(\mathbf{A - 2B}) = (1/5)\cdot\left(\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} - 2.\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}\right) = (1/5)\left(\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 18 & -10 \end{pmatrix}\right) = (1/5)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 15 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

b)
Halla la matriz Z que verifica $B^2 + ZA + B^t = 3I$ (I denota la matriz identidad y B^t la matriz traspuesta de B).

La matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ tiene matriz inversa A^{-1}, porque det(A) = |A| = 10 - 9 = 1 ≠ 0.
Sabemos que $A^{-1} = (1/|A|)\cdot Adj(A^t)$.
$A^t = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; luego $A^{-1} = (1/|A|)\cdot Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
De la expresión $B^2 + ZA + B^t = 3I$, tenemos $ZA = 3I – B^2 – B^t$. Multiplicando los dos miembros de la igualdad $ZA = 3I – B^2 – B^t$ por la inversa A^{-1}por la derecha tenemos:
$ZAA^{-1} = (3I – B^2 – B^t)A^1$, de donde $Z = (3I – B^2 – B^t)A^1$.

$$\mathbf{Z} = (3I – B^2 – B^t)A^{-1} = \left(3.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\right).\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 37 & -24 \\ -54 & 61 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\right).\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 & 33 \\ 58 & -63 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{=} \begin{pmatrix} -76 & -39 \\ 101 & 48 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4 opción B, modelo 3 Septiembre 2013 específico 1

Considera las rectas r y s dadas por $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 3 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z - 5 = 0 \end{cases}$

a) [1 punto] Determina la posición relativa de r y s.
b) [1'5 puntos] Calcula la distancia entre r y s.

Solución

Considera las rectas r y s dadas por $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 3 + 5\lambda \\ z = \quad \lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z - 5 = 0 \end{cases}$

a)
Determina la posición relativa de r y s.

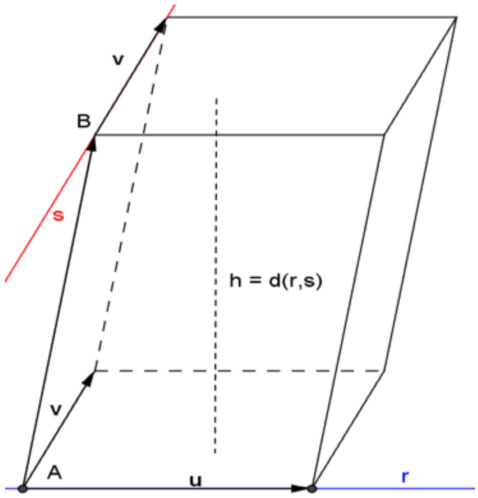
Ponemos la recta "s" en paramétricas tomando y = μ ∈ R, luego $s \equiv \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = \quad \mu \\ z = 5 \end{cases}$

Un punto de "r" es A(2,3,0), y un vector director es **u** = (-3,5,1).
Un punto de "s" es B(1,0,5), y un vector director es **v** = (-1,1,0).
Observamos que los vectores **u** y **v** no son proporcionales, por tanto las rectas se cortan o se cruzan.
AB = (-1,-3,5)
Si det(**AB**,**u**,**v**) = 0, las rectas se cortan.
Si det(**AB**,**u**,**v**) ≠ 0, las rectas se cruzan.

Como det(**AB**,**u**,**v**) = $\begin{vmatrix} -1 & -3 & 5 \\ -3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ Adjuntos tercera fila = (-1)(-28) – (1)(14) = 14 ≠ 0, luego las retas se cruzan.

Formamos el vector **AB** = (6,0,0). Vemos que **AB** ≠ λ**u**, por tanto las rectas son paralelas y distintas.
b)
Calcula la distancia entre r y s.

Antes de resolver el problema, haremos un pequeño dibujo, y de cada recta tomaremos un punto y un vector director.



De la recta “r” tomamos el punto A(2,3,0) y como vector director el **u** = (-3,5,1).
De la recta “s” tomamos el punto B(1,0,5) y como vector director el **v** = (-1,1,0).
Para el punto A de “r” tomamos y = 0, de donde x = 2 y z = 4, luego A(2,0,4)

Sabemos que el volumen del paralelepípedo es el valor absoluto (| |) del producto mixto de tres vectores con origen común ([**AB,u,v**]), pero también es el área de la base (área de un paralelogramo, que es el módulo del producto vectorial de los vectores que lo determinan ||**uxv**||) por la altura (h), que es la distancia entre las rectas, es decir:

Volumen del paralelepípedo = [**AB,u,v**] = área base . h = ||**uxv**||·d(OX,r), de donde la distancia entre las rectas es “d(OX,r) = | ([**AB,u,v**])/(||**uxv**||) |”

AB = (6,0,0); **u** = (-3,5,1), **v** = (-1,1,0).

Ya hemos calculado, en el apartado a), [**AB,u,v**] = det(**AB**,**u**,**v**) = $\begin{vmatrix} -1 & -3 & 5 \\ -3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ = 14.

uxv = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ = **i**(-1) – **j**(1) + **k**(2) = (-1,-1,2), de donde ||**uxv**|| = $\sqrt{1^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}$.

La distancia pedida es d(OX,r) = | ([OA,i,u])/(||ixu||) | = $\frac{14}{\sqrt{6}} = \frac{14\sqrt{6}}{6} = \frac{7\sqrt{6}}{3} \cong$ **5’715 u.l.**