Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo Junio 2013

Sea g la función definida por $g(x) = \dfrac{mx^3}{(x-n)^2}$ para $x \neq n$.

a) [1'75 puntos] Halla m y n sabiendo que la recta $y = 2x - 4$ es una asíntota de la gráfica de *g.*

b) [0'75 puntos] Determina si la gráfica de *g* es simétrica respecto al origen.

Solución

Sea g la función definida por $g(x) = \dfrac{mx^3}{(x-n)^2}$ para $x \neq n$.

a)

Halla m y n sabiendo que la recta $y = 2x - 4$ es una asíntota de la gráfica de *g.*

Como en la función que me han dado el grado del numerador es una unidad más que el grado del denominador, f(x) tiene una asíntota oblicua (A.O.) de la forma $y = ax + b$ con

$a = \lim_{x\to\infty} \dfrac{g(x)}{x}$ y $b = \lim_{x\to\infty} [g(x) - ax]$, y es la misma en $+\infty$ y en $-\infty$.

Como $y = 2x - 4$ es una asíntota de la gráfica de *g*, tenemos que **a = 2** y **b = -4**.

De $a = \lim_{x\to\infty} \dfrac{g(x)}{x}$, tenemos $2 = \lim_{x\to\infty} \dfrac{mx^3}{x\cdot(x-n)^2} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{mx^3}{x\cdot(x^2 - 2nx + n^2)} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{mx^3}{x^3 - 2nx^2 + n^2x} =$

$= \lim_{x\to\infty} \dfrac{mx^3}{x^3} = \lim_{x\to\infty} (m) = m$, por tanto **m = 2.**

De $b = \lim_{x\to\infty} [g(x) - ax]$, tenemos $-4 = \lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x^3}{(x-n)^2} - 2x \right) = \lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x^3}{x^2 - 2nx + n^2} - 2x \right) =$

$= \lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x^3 - 2x^3 + 4nx^2 - 2n^2x}{x^2 - 2nx + n^2} \right) = \lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{4nx^2 - 2n^2x}{x^2 - 2nx + n^2} \right) = \lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{4nx^2}{x^2} \right) = \lim_{x\to\infty} (4n) = 4n$, por tanto tenemos **n = -1.**

b)

Determina si la gráfica de *g* es simétrica respecto al origen.

Sabemos que la gráfica de g es simétrica respecto al origen si $g(-x) = -g(x)$.

Tenemos $g(x) = \dfrac{2x^3}{(x+1)^2}$. Como $g(-x) = \dfrac{2(-x)^3}{(-x+1)^2} = \dfrac{-2x^3}{(-x+1)^2} = -\dfrac{2x^3}{(-x+1)^2} \neq -g(x)$, **la gráfica de g no es simétrica respecto del origen.**

Ejercicio 2 opción A, modelo Junio 2013

[2'5 puntos] De la función $f : R \to R$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que alcanza un máximo relativo en $x = 1$, que la grafica tiene un punto de inflexión en (0,0) y que $\int_0^1 f(x)dx = 5/4$. Calcula a, b, c y d.

Solución

De la función $f : R \to R$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que alcanza un máximo relativo en $x = 1$, que la grafica tiene un punto de inflexión en (0,0) y que $\int_0^1 f(x)dx = 5/4$. Calcula a, b, c y d

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Esta función es polinómica por tanto continua, derivable e integrable las veces que sean necesarias, en R.

Como tiene un máximo relativo en x = 1, tenemos **f '(1) = 0**

Como (0,0) es un punto de inflexión, tenemos **f(0) = 0** por punto y que **f ''(0) = 0** por ser

punto de inflexión.
Además $\int_0^1 f(x)dx = 5/4$.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$.
De $f''(0) = 0$, tenemos $0 = 2b$, por tanto $\mathbf{b = 0}$
De $f(0) = 0$, tenemos $0 = d$, por tanto $\mathbf{d = 0}$
De $f'(1) = 0$, tenemos $0 = 3a + c$, de donde $\mathbf{c = -3a}$.

Sustituyendo los valores encontrados tenemos $f(x) = ax^3 - 3ax$.
De $\int_0^1 f(x)dx = \frac{5}{4}$ resulta $\frac{5}{4} = \int_0^1 (ax^3 - 3ax)dx = \left[\frac{ax^4}{4} - \frac{3ax^2}{2}\right]_0^1 = a/4 - (3a)/2$
Resolviendo la ecuación $5/4 = a/4 - (3a)/2$, obtenemos $5/4 = -5a/4$, luego $\mathbf{a = -1}$ y por tanto $\mathbf{c} = -3(-1) \mathbf{= 3}$.
La función pedida es $f(x) = -x^3 + 3x$.

Ejercicio 3 opción A, modelo Junio 2013

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$.

a) [0'75 puntos] Halla A^{-1}.
b) [1'25 puntos] Calcula la matriz X que satisface $AX = B^tC$ (B^t es la matriz traspuesta de B).
c) [0'5 puntos] Halla el determinante de $A^{2013}B^tB(A^{-1})^{2013}$.

Solución

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$.

a)
Halla A^{-1}.

Sabemos que $A^{-1} = (1/|A|)\cdot Adj(A^t)$.

$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ Adjuntos segunda fila $= -(2)\cdot(1) = -2$; $A^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

$A^{-1} = (1/|A|)\cdot Adj(A^t) = (-1/2)\cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

b)
Calcula la matriz X que satisface $AX = B^tC$ (B^t es la matriz traspuesta de B).

Como existe A^{-1} multiplicamos la expresión $AX = B^tC$ por la izquierda por A^{-1}.
$A^{-1}\cdot AX = A^{-1}\cdot B^tC \rightarrow I\cdot X = A^{-1}\cdot B^tC \rightarrow X = A^{-1}\cdot B^tC$

Luego $X = A^{-1}\cdot B^tC = (-1/2)\cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = (-1/2)\cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -1 & 14 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$

c)
Halla el determinante de $A^{2013}B^tB(A^{-1})^{2013}$.

Sabemos que los determinantes sólo existen para matrices cuadradas. Calculamos primero

$B^t\cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, que es cuadrada de orden 3 al igual que A y A^{-1}.

Sabemos que $|A\cdot A\cdot A\cdots\{n\ veces\}\cdot\cdot A\cdot A\cdot A| = |A|\cdot|A|\cdot|A|\cdots\{n\ veces\}\cdot\cdot|A|\cdot|A|\cdot|A| = (\ |A|\ )^n$.
De $AA^{-1} = I$, tenemos $|\ AA^{-1}| = |\ A||A^{-1}| = |I| = 1$, de donde $|A^{-1}| = 1/(|A|)$, luego:
$|\ A^{-1}\cdot\ A^{-1}\cdot\ A^{-1}\cdots\{n\ veces\}\cdot\cdot\ A^{-1}\cdot\ A^{-1}\cdot\ A^{-1}| = (1/|A|)\cdot(1/|A|)\cdot\cdot\{n\ veces\}\cdot\cdot(1/|A|)\cdot(1/|A|) = (\ 1/|A|\ )^n$.

Luego $|\ A^{2013}\cdot B^tB\cdot(A^{-1})^{2013}\ | = |\ A^{2013}|\cdot|B^tB|\cdot|(A^{-1})^{2013}| = (\ |A|\ )^n\cdot|B^tB|\cdot(\ 1/|A|\ )^n = |B^tB| =$

$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila $= 1\cdot(4) - 2\cdot(2) = 0$.

Ejercicio 4 opción A, modelo Junio 2013

[2'5 puntos] Calcula la distancia entre las rectas

$r \equiv x = y = z$ y $s \equiv x - 1 = y - 2 = z - 3$.

Solución

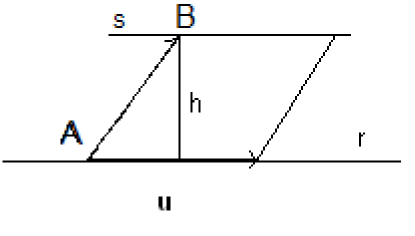
Calcula la distancia entre las rectas $r \equiv x = y = z$ y $s \equiv x - 1 = y - 2 = z - 3$.

De “r” tenemos el punto A(0,0,0) y el vector director **u** = (1,1,1).
De “s” tenemos el punto B(1,2,3) y el vector director **v** = (1,1,1).

Como vemos las rectas “r” y “s” son paralelas (tienen el mismo vector director) y distintas pues los vectores **u** = (1,1,1) y **AB** = (1,2,3) no son proporcionales.

Como las rectas son paralelas, vamos a calcular la distancia entre ellas como el área de un paralelogramo.

Por área de un paralelogramo. Es la altura del paralelogramo



Dada la recta “r” conocemos el punto A y el vector **u**. De la recta “s” sólo tomamos el punto B

El área del paralelogramo determinado por los vectores **u** y **AB** es ||**AB**x**u**|| = base·altura = ||**u**||·h, pero la altura “h” es d(s,r) = d(B;r), luego d(B;r) = (||**AB**x**u**||) / (||**u**||)

De “r” tenemos el punto A(0,0,0) y el vector director **u** = (1,1,1). De “s” el punto B(1,2,3).
AB = (1,2,3)

$$\mathbf{AB}\times\mathbf{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-1) - \mathbf{j}(-2) + \mathbf{k}(-1) = (-1,2,-1)$$

$||\mathbf{AB}\times\mathbf{u}|| = \sqrt{(1^2+2^2+1^2)} = \sqrt{(6)}$

$||\mathbf{u}|| = \sqrt{(1^2+1^2+1^2)} = \sqrt{(3)}$

$d(s;r) = d(B;r) = (||\mathbf{AB}\times\mathbf{u}||) / (||\mathbf{u}||) = (\sqrt{(6)}) / (\sqrt{(3)}) = \sqrt{(2)}$ u.l.

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo Junio 2013

[2'5 puntos] Sea $f : R \to R$ la función definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Se sabe que un punto de inflexión de la grafica de f tiene abscisa $x = 1$ y que f tiene un mínimo relativo en $x = 2$ de valor -9. Calcula a, b y c.

Solución

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ es una función polinómica, por tanto continua y derivable las veces que nos hagan falta en R.

Sabemos que los puntos de inflexión anulan la 2ª derivada, luego **f ''(1) = 0**.

Sabemos que los extremos relativos anulan la 1ª derivada, luego **f '(2) = 0**. Como el valor en el extremo es -9, tenemos **f(2) = -9**.

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$; $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$; $f''(x) = 6x + 2a$.

De $f''(1) = 0$, tenemos $6(1) + 2a = 0$, luego $\mathbf{a = -3}$.

De $f'(2) = 0$, tenemos $3(2)^2 + 2(-3)(2) + b = 0$, luego $\mathbf{b = 0}$.

De $f(2) = -9$, tenemos $(2)^3 + (-3)\cdot(2)^2 + c = -9$, luego $\mathbf{c = -5}$.

Ejercicio 2 opción B, modelo Junio 2013

[2'5 puntos] Calcula $\int_2^4 \frac{x^2}{x^2 - 6x + 5}dx$.

Solución

Calcula $\int_2^4 \frac{x^2}{x^2 - 6x + 5}dx$.

Primero determinaremos la integral indefinida $I = \int \frac{x^2}{x^2 - 6x + 5}dx$

$I = \int \frac{x^2}{x^2 - 6x + 5}dx$, es una integral racional, pero como el numerado es de grado igual que el denominador tenemos que efectuar antes la división entera.

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x^2 - 6x + 5 \\ \cline{2-2} -x^2 + 6x - 5 & 1 \\ \hline 6x - 5 & \end{array}$$

Recordamos que $I = \int ((Cx) + R(x)/(d(x))dx = \int 1dx + \int \frac{6x - 5}{x^2 - 6x + 5}dx = x + I_1$.

La integral $I_1 = \int \frac{6x - 5}{x^2 - 6x + 5}dx$, es la racional. Si resolvemos $x^2 - 6x + 5 = 0$, obtenemos como soluciones $x = 1$ y $x = 5$.

$I_1 = \int \frac{6x - 5}{x^2 - 6x + 5}dx = \int \frac{6x - 5}{(x - 1)(x - 5)}dx$ $I_1 = \int \frac{A}{x - 1}dx + \int \frac{B}{x - 5}dx = A\cdot\ln|x - 1| + B\cdot\ln|x - 5|$

La integral pedida es

$I = x + I_1 = x + A\cdot\ln|x - 1| + B\cdot\ln|x - 5|$

Sólo nos falta determinar las constantes A y B:

$$\frac{6x - 5}{(x - 1)(x - 5)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 5} = \frac{A(x - 5) + B(x - 1)}{(x - 1)(x - 5)}$$

Igualando numeradores tenemos $6x – 5 = A\cdot(x - 5) + B\cdot(x - 1)$.

Para $x = 1$, tenemos $1 = -4A$, de donde $A = -1/4$.

Para $x = 5$, tenemos $25 = 4B$, de donde $B = 25/4$.

La integral pedida es $I = x + I_1 = x + (-1/4)\cdot\ln|x - 1| + (25/4)\cdot\ln|x - 5| =$

Luego $\int_2^4 \frac{x^2}{x^2 - 6x + 5}dx = [x + (-1/4)\cdot\ln|x - 1| + (25/4)\cdot\ln|x - 5|\ ]_2^4 =$

$= (4 + (-1/4)\cdot\ln(3) + (25/4)\cdot\ln(1)\ ) – (2 + (-1/4)\cdot\ln(1) + (25/4)\cdot\ln(3)\ ) =$

$= (4 - (1/4)\cdot\ln(3) - 2 - (25/4)\cdot\ln(3)\ ) = 2 – (13/2)\cdot\ln(3) \cong -5'141$.

Ejercicio 3 opción B, modelo Junio 2013

Sabiendo que el determinante de una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{pmatrix}$ es 4, calcula los siguientes determinantes indicando, en cada caso, las propiedades que utilizas:

a) [1 punto] $\det(-2A)$ y $\det(A^{-1})$.

b) [1'5 puntos] $\begin{vmatrix} a & -b & c \\ 2d & -2e & 2f \\ p & -q & r \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} -3d & -3e & -3f \\ a & b & c \\ -p & -q & -r \end{vmatrix}$

Solución

Sabiendo que el determinante de una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{pmatrix}$ es 4, calcula los siguientes determinantes indicando, en cada caso, las propiedades que utilizas:

a)

$\det(-2A)$ y $\det(A^{-1})$.

Si A_n es una matriz de grado n sabemos que $|kA| = k^n|A|$

De $AA^{-1} = I$, tenemos $|AA^{-1}| = |A||A^{-1}| = |I| = 1$, de donde $|A^{-1}| = 1/(|A|)$

$\det(-2A) = (-2)^3\cdot\det(A) = (-8)\cdot 4 = -32$.

$\det(A^{-1}) = 1/(\det(A)) = 1/4$.

b)

$$\begin{vmatrix} a & -b & c \\ 2d & -2e & 2f \\ p & -q & r \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} 2\begin{vmatrix} a & -b & c \\ d & -e & f \\ p & -q & r \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} -2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{vmatrix} = (-2)\cdot(4) = -8.$$

$$\begin{vmatrix} -3d & -3e & -3f \\ a & b & c \\ -p & -q & -r \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} -3\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ -p & -q & -r \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} (-1)(-3)\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} (-1)(-3)(-1)\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{vmatrix} = (-3)\cdot(4) = -12.$$

(1) Si una fila (columna) de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número puede salir fuera del determinante multiplicándolo
(2) Si se cambian entre si dos filas (columnas) de un determinante dicho determinante cambia de signo

Ejercicio 4 opción B, modelo Junio 2013

[2'5 puntos] Considera las rectas

$$r \equiv x = y = z \qquad s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \qquad t \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

Halla la recta que corta a "r" y a "s" y es paralela a "t".

Solución

Recordamos que dadas las rectas r(A;**u**) y s(B;**v**), donde A y B son puntos, y **u** y **v** sus vectores directores, entonces si los vectores son independientes (no proporcionales), las rectas se cortan o se cruzan. En este caso si det(**AB,u,v**) = 0, las rectas se cortan en un punto.

Llamamos "r_1" a la recta pedida.
Como "r_1" es paralela a la recta "t", tenemos que "r_1" tiene como vector director $\mathbf{u_1}$ = (2,3,1), el mismo de la recta "t".

Supongamos el punto C(a,b,c) como un punto cualquiera de la recta "r_1", por tanto la ecuación continua de la recta "r_1" sería $\frac{x-a}{2} = \frac{y-b}{3} = z - c$.
De la recta "r" tomamos el punto A(0,0,0) y el vector director **u** = (1,1,1).
De la recta "s" tomamos el punto B(2,1,0) y el vector director **v** = (producto vectorial de los vectores normales de cada plano que determinan la recta) = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ = **i**(0) – **j**(0) + **k**(1) =
= (0,0,1).

Como me dicen que "r_1" corta a la recta "r" tenemos det($\mathbf{AC,u,u_1}$) = 0 = $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ =
= a(-2) - b(-1) + c(1) = -2a + b + c = 0

Como me dicen que "r_1" corta a la recta "s" tenemos det($\mathbf{BC,v,u_1}$) = 0 = $\begin{vmatrix} a-2 & b-1 & c \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ =
= (a - 2)(-3) - (b - 1)(-2) + c(0) = -3a + 6 + 2b - 2 = -3a + 2b + 4 = 0.

Resolviendo el sistema $\begin{cases} -2a + b + c = 0 \\ -3a + 2b = -4 \end{cases}$, obtenemos los infinitos puntos que forman la recta "r_1". Como sólo necesitamos uno tomando a = 0, tenemos b = -2 y c = 2, y un punto de la recta "r_1" es C(a,b,c) = C(0,-2, 2), y **la recta pedida es "r_1"≡ x/2 = (y + 2)/3 = z - 2**.