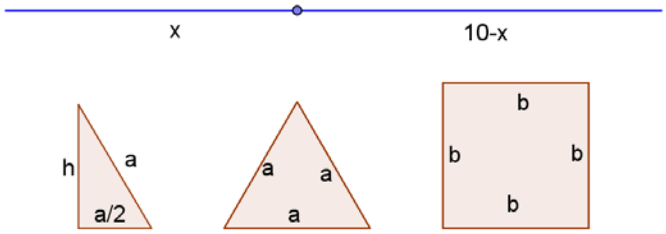
Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo Septiembre 2013

[2'5 puntos] Un alambre de 10 metros de longitud se divide en dos trozos. Con uno de ellos se forma un triangulo equilátero y con el otro un cuadrado. Halla la longitud de dichos trozos para que la suma de las áreas sea mínima.

Solución



Función a optimizar Área = área triángulo + área cuadrado = $(1/2)a\cdot h + b^2$

Relaciones: perímetro: $3a = x \to a = x/3$; $4b = 10 - x \to b = (10 - x)/4$.

Altura: $h^2 = a^2 - (a/2)^2$, de donde $h = \sqrt{a^2 - a^2/4} = \dfrac{\sqrt{3}\cdot a}{2} = \dfrac{\sqrt{3}\cdot(x/3)}{2} = \dfrac{\sqrt{3}\cdot x}{6}$

Mi función $A(x) = (1/2)(x/3)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}\cdot x}{6}\right) + ((10 - x)/4)^2 = \dfrac{\sqrt{3}\cdot x^2}{36} + \dfrac{(10 - x)^2}{16}$

El mínimo anula A'(x)

$A'(x) = \dfrac{\sqrt{3}\cdot x}{18} - \dfrac{(10 - x)}{8}$, de $A'(x) = 0 \to \dfrac{\sqrt{3}\cdot x}{18} - \dfrac{(10 - x)}{8} = 0 \to \dfrac{\sqrt{3}\cdot x}{18} = \dfrac{(10 - x)}{8} \to 8\cdot\sqrt{3}\cdot x = 180 - 18x$

$\to 18x + 8\cdot\sqrt{3}\cdot x = 180 \to (18 + 8\cdot\sqrt{3})\cdot x = 180 \to x = \dfrac{180}{18 + 8\sqrt{3}} \cong 5'65$ m.

Veamos que es mínimo, es decir A''(x) > 0

$A''(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{18} + \dfrac{1}{8} > 0$, luego es mínimo independientemente del valor de "x"

Dimensiones pedidas: $x = \dfrac{180}{18 + 8\sqrt{3}}$ m. y $10 - \dfrac{180}{18 + 8\sqrt{3}} = \dfrac{80\sqrt{3}}{18 + 8\sqrt{3}}$ m.

Ejercicio 2 opción A, modelo Septiembre 2013

a) [2 puntos] Determina la función $f: R \to R$ tal que $f'(x) = (2x + 1)e^{-x}$ y su grafica pasa por el origen de coordenadas.

b) [0'5 puntos] Calcula la recta tangente a la grafica de f en el punto de abscisa x = 0.

Solución

Por el Teorema Fundamental del Cálculo Integral (T.F.C.I): Si f(x) es continua en [a,b] entonces la función $F(x) = \int_a^x [f(t)]dt$ es derivable y su derivada es $F'(x) = (\int_a^x [f(t)]dt)' = f(x)$.

En nuestro caso $f(x) = \int f'(x)dx$

$f(x) = \int f'(x)dx = \int (2x + 1)e^{-x}dx$ = {Integral por partes por partes $\int udv = uv - \int vdz$. En nuestro caso $u = 2x+1$ y $dv = e^{-x}dx$, de donde $du = 2dx$ y $v = \int dv = \int e^{-x}dx= -e^{-x}$ } $= (2x + 1)(-e^{-x}) - \int -e^{-x}\cdot 2dx= - e^{-x}\cdot(2x + 1) + 2\int e^{-x}dx =$ $= -e^{-x}\cdot(2x + 1) - 2e^{-x} + K$; es decir $f(x) = -e^{-x}\cdot(2x + 1) - 2e^{-x} + K$

Como pasa por el origen (0,0), $f(0) = 0 \to -e^0(1) - 2e^0 + K = 0 = -3 + K = 0$, de donde K = 3 y la función pedida es $f(x) = -e^{-x}\cdot(2x + 1) - 2e^{-x} + 3$

b)

Sabemos que la recta tangente de f en x = 0 es " $y - f(0) = f'(0).(x - 0)$"

$f(x) = = -e^{-x}\cdot(2x + 1) - 2e^{-x} + 3$, luego f(0) = 0. Nos han dicho que pasa por (0,0).

$f'(x) = (2x + 1)e^{-x}$, luego $f'(0) = (1)e^0 = 1$, por **la recta tangente es** y – 0 = 1.(x). Operando sale **y = x**.

Ejercicio 3 opción A, modelo Septiembre 2013

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) [1 punto] Halla, si es posible, A^{-1} y B^{-1}.

b) [0'25 puntos] Halla el determinante de $AB^{2013}A^t$ siendo A^t la matriz traspuesta de A.
c) [1'25 puntos] Calcula la matriz X que satisface AX - B = AB.

Solución

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a)
Halla, si es posible, A^{-1} y B^{-1}.

Para que exista B^{-1} su determinante det(B) = |B| tiene que ser ≠ 0.

Como $\det(B) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ Adjuntos tercera fila $= 0 + 0 + (-1)(1 - 1) = 0$, **no existe B^{-1}**.

Para que exista A^{-1} su determinante det(A) = |A| tiene que ser ≠ 0.

Como $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ Adjuntos tercera fila $= 0 + 0 + (2)(1 - 0) = 2$, **existe A^{-1}**. Sabemos que $A^{-1} = (1/|A|)\cdot Adj(A^t)$.

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = (1/|A|)\cdot Adj(A^t) = (1/2)\cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b)
Halla el determinante de $AB^{2013}A^t$ siendo A^t la matriz traspuesta de A.

Sabemos que $|B\cdot B\cdot B\cdots\{n \text{ veces}\}\cdot\cdot B\cdot B\cdot B| = |B|\cdot|B|\cdot|B|\cdots\{n \text{ veces}\}\cdot\cdot|B|\cdot|B|\cdot|B| = (\,|B|\,)^n$, además $|A| = |A^t|$.

Luego $|\,AB^{2013}A^t\,| = |A|\cdot|B^{2013}|\cdot|A^t| = (2)\cdot|B|^{2013}\cdot(2) = 2\cdot 0^{2013}\cdot 2 = 2\cdot 0\cdot 2 = 0$.

c)
Calcula la matriz X que satisface AX - B = AB.

De AX - B = AB, tenemos AX = B + AB. Como existe A^{-1} multiplicamos la expresión AX = B + AB por la izquierda por A^{-1}.

$A^{-1}AX = A^{-1}B + A^{-1}AB \rightarrow I\cdot X = A^{-1}\cdot B + I\cdot B \rightarrow X = A^{-1}\cdot B + B$

Luego $X = A^{-1}\cdot B + B = (1/2)\cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$

$= (1/2)\cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3/2 \\ 2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 5/2 \\ 3 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4 opción A, modelo Septiembre 2013

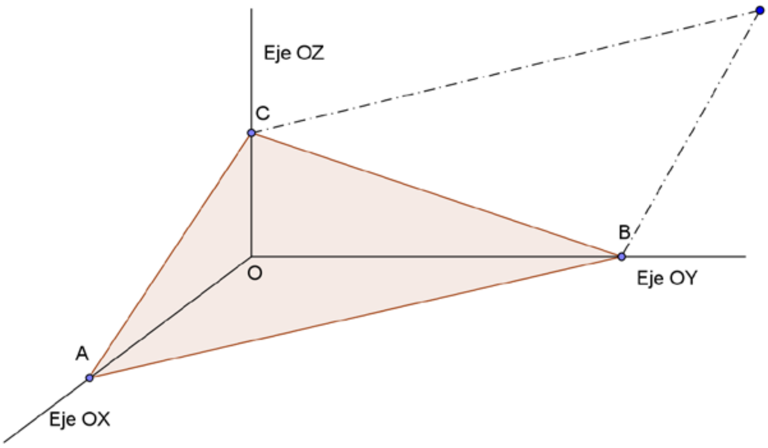
Considera el plano π de ecuación $2x + y + 3z - 6 = 0$.
a) [1'5 puntos] Calcula el área del triangulo cuyos vértices son los puntos de corte del piano π con los ejes coordenados.
b) [1 punto] Calcula el volumen del tetraedro determinado por el piano π y los planos coordenados.

Solución

Considera el plano π de ecuación $2x + y + 3z - 6 = 0$.

a)
Calcula el área del triangulo cuyos vértices son los puntos de corte del piano π con los ejes coordenados.

Ponemos el plano $\pi \equiv 2x + y + 3z - 6 = 0$ en la forma segmentaria $2x/6 + y/6 + 3z/6 = 6/6$, es decir $x/3 + y/6 + z/2 = 1$, con lo cual los cortes con los ejes son los puntos A(3,0,0), B(0,6,0) y C(0,0,2).
También podemos calcular los puntos A, B y C resolviendo los sistemas; $\pi = 0$, $y = z = 0$; $\pi = 0$, $x = z = 0$ y también $\pi = 0$, $x = y = 0$.



Sabemos que el área de un triángulo ABC es la mitad del área del paralelogramo que determinan su lados AB y AC, es decir la mitad del módulo (|| ||) determinado por los vectores **AB** y **AC**, luego el Área del triángulo es = (1/2)·||**AB**x**AC**||.

AB = (3-0, 0-6, 0-0) = (3, -6, 0)

AC = (3-0, 0-0, 0-2) = (3, 0, -2)

$$\mathbf{AB}\times\mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(12-0) - \mathbf{j}(-6-0) + \mathbf{k}(0+18) = (12,6,18)$$

$||\mathbf{AB}\times\mathbf{AC}|| = \sqrt{(12)^2+(6)^2+(18)^2} = \sqrt{504} = 6\sqrt{14}$ u^2

Área del triángulo es = (1/2)·||**AB**x**AC**|| = (1/2)·6√(14) = 3√(14) u^2

b)

Calcula el volumen del tetraedro determinado por el piano π y los planos coordenados.

Sabemos que el volumen de un tetraedro es (1/6) del volumen del paralelepípedo que determinan tres vectores con el mismo origen, es decir (1/6) del valor absoluto del producto mixto de **OA**, **OB** y **OC** (lo indicaremos entre corchetes{ }).

Volumen = (1/6).| { **OA, OB**, **OC** } |

OA = (3, 0, 0), **OB** = (0, 6, 0), **OC** = (0, 0, 2)

$$\{ \mathbf{OA}, \mathbf{OB}, \mathbf{OC} \} = \det(\mathbf{OA}, \mathbf{OB}, \mathbf{OC}) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 6\cdot 2 = 36.$$

Volumen = (1/6).| { **OA, OB**, **OC** } | = (1/6)·36 = 6 u^3.

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo Septiembre 2013

Sea f: (0,+ ∞) → R la función definida por $f(x) = \frac{2\ln(x)}{x^2}$ (donde In denota el logaritmo neperiano).

a) [1'75 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) [0'75 puntos] Estudia y determina las asíntotas de la grafica de f .

Solución

Sea f: (0,+ ∞) → R la función definida por $f(x) = \frac{2\ln(x)}{x^2}$ (donde In denota el logaritmo neperiano).

a)

Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Para estudiar la monotonía veamos la 1ª derivada

$f(x)=\frac{2\ln(x)}{x^2}$; $f'(x)=\frac{\frac{2}{x}x^2-2\ln(x)2x}{\left(x^2\right)^2}=\frac{2x-4x\ln(x)}{x^4}$

Resolvemos f '(x) = 0, luego 2x - 4x·ln(x) = 0 = x·(2 – 4ln(x)), de donde x = 0 (NO está en el dominio) y también 2 – 4ln(x) = 0, de donde ln(x) = 1/2, con lo cual $x = e^{1/2} = \sqrt{e} \cong$ 1'65, que será el posible máximo ó mínimo relativo.

Como f '(1) = (2 - 0)/(+) > 0, f(x) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en (0, $\sqrt{e}$)

Como f '(2) = (4 – 8ln(2))/(+) ≅ -1'54/(+) < 0, f(x) es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en ($\sqrt{e}$,+∞).

Por definición x = $\sqrt{e}$ es un máximo relativo de f(x), que vale f($\sqrt{e}$) = $\frac{2\ln(\sqrt{e})}{\left(\sqrt{e}\right)^2}=\frac{2\ln(e^{1/2})}{e}=\frac{2\cdot(1/2)\cdot\ln(e)}{e}=$

= 1/e ≅ 0'37.

b)

Estudia y determina las asíntotas de la grafica de f .

Como $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}\frac{2\ln(x)}{x^2} = -\infty/0^+ = -\infty\cdot(1/0^+) = -\infty\cdot\infty = -\infty$, **la recta x = 0 es una asíntota vertical de f**.

Como $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln(x)}{x^2} = +\infty/+\infty$ [La regla de L'Hôpital (L'H) nos dice que si las funciones f(x) y g(x) son continuas y derivables en un entorno de "a", f(a) = g(a) = 0 y existe $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

La regla se puede reiterar, y se puede aplicar si sale 0/0, ∞/∞, y si el límite tiende a ∞]

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln(x)}{x^2} = +\infty/+\infty$, Le aplicamos L'H

$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln(x)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2/x}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$, **la recta y = 0 es una asíntota horizontal de f(x) en + ∞.**

Ejercicio 2 opción B, modelo Septiembre 2013

Sea g: R → R la función definida por $g(x) = -x^2 + 6x - 5$.

a) [0'75 puntos] Halla la ecuación de la recta normal a la grafica de g en el punto de abscisa x = 4.

b) [1'75 puntos] Esboza el recinto limitado por la grafica de g y la recta x - 2y + 2 = 0. Calcula el área de este recinto.

Solución

Sea g: R → R la función definida por $g(x) = -x^2 + 6x - 5$.

a)

Halla la ecuación de la recta normal a la grafica de g en el punto de abscisa x = 4.

La ecuación normal a g en x = 4 es "y - g(4) = [-1/(g'(4))]·(x - 4)"

$g(x) = -x^2 + 6x – 5 \rightarrow g(4) = -(4)^2 + 6(4) - 5 = 3$

$g'(x) = -2x + 6 \rightarrow g'(4) = -2(4) + 6 = -2$.

La recta pedida es y - 3 = (-1/-2)·(x - 4) = x/2 - 2, es decir **y = x/2 + 1**.

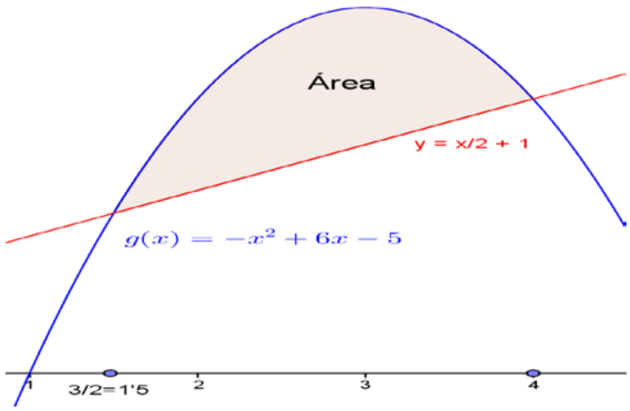
b)

Esboza el recinto limitado por la grafica de g y la recta x - 2y + 2 = 0. Calcula el área de este recinto.

Si nos damos cuenta la recta x - 2y + 2 = 0, es la recta normal pedida en x = 4, es decir y = x/2 + 1, y con dos puntos es suficiente dibujarla. Uno es el (4,3), donde es normal a g y otro puede ser el (0,-1).

La parábola $g(x) = -x^2 + 6x – 5$, tiene las ramas hacia abajo (el número que multiplica a x^2 es negativo), su vértice (es un máximo y anula la 1ª derivada, $(-x^2 + 6x – 5)' = -2x+6 = 0$, de donde x = 3) en el punto V(3,4), y los cortes con abscisas los obtenemos resolviendo $-x^2 + 6x – 5 = 0$, ó $x^2 - 6x + 5 = 0$, obteniendo x = 5 y x=1. El corte con ordenadas es (0,-5)

Teniendo en cuenta el apartado anterior, un esbozo del recinto pedido es



Para calcular el área del recinto sólo nos queda calcular el punto de corte de tg con la recta normal, es decir las soluciones de la ecuación: $-x^2 + 6x - 5 = x/2 + 1$, de donde $-2x^2 + 11x - 12 = 0$, y soluciones son en x = 4 y x = 3/2 = 1'5.

El área pedida es Área = $\int_{3/2}^{4}(-x^2+ 6x - 5 - (x/2+1))dx = \int_{3/2}^{4}(-x^2+ 11x/2 - 6)dx = \left[\dfrac{-x^3}{3}+ 11x^2/4 - 6x\right]_{3/4}^{4} =$

$= \left(\dfrac{-(4)^3}{3}+ 11(4)^2/4 - 6(4)\right) - \left(\dfrac{-(3/2)^3}{3}+ 11(3/2)^2/4 - 6(3/2)\right) = -4/3 – (-63/16) = 125/48 \cong 2'6$ u.a.

Ejercicio 3 opción B, modelo Septiembre 2013

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{aligned} 2x - 4y + 6z &= 6 \\ my + 2z &= m + 1 \\ -3x + 6y - 3mz &= -9 \end{aligned}$$

a) [1'75 puntos] Discute el sistema según los valores del parámetro m.
b) [0'75 puntos] Resuélvelo para m = 3. Para dicho valor de m, calcula, si es posible, una solución en la que y = 0.

Solución

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{aligned} 2x - 4y + 6z &= 6 \\ my + 2z &= m + 1 \\ -3x + 6y - 3mz &= -9 \end{aligned}$$

a)
Discute el sistema según los valores del parámetro m.

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & m & 2 \\ -3 & 6 & -3m \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 6 \\ 0 & m & 2 & m+1 \\ -3 & 6 & -3m & -9 \end{pmatrix}$.

Si det(A) = |A| ≠ 0, rango(A) = rango(A^*) = 3 = nº de incógnitas. El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & m & 2 \\ -3 & 6 & -3m \end{vmatrix}$ Adjuntos segunda fila $= 0 + m(-6m+18) – 2(12-12) = m(-6m+18)$.

Resolviendo la ecuación |A| = 0, tenemos m(-6m+18) = 0, de donde m = 0 y m = 3.

Si **m ≠ 0 y m ≠ 3**, det(A) = |A| ≠ 0, rango(A) = rango(A^*) = 3 = nº de incógnitas. **El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.**

Si **m = 0**

$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 0 & -9 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$, tenemos rango(A)=2

En A^* como $\begin{vmatrix} -4 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & -9 \end{vmatrix}$ Adjuntos segunda fila $= 0 + 2(36-36) - (1)(-36) = 36 \neq 0$, tenemos rango($A^*$) = 3, es decir

rango(A) = 2 $\neq$ rango(A^*) = 3, luego e**l sistema es incompatible y no tiene solución.**

Si **m = 3**

$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \\ -3 & 6 & -9 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ -3 & 6 & -9 & -9 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, tenemos rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & 3 & 4 \\ -3 & 6 & -9 \end{vmatrix}$ Adjuntos segunda fila $= 0 + 3(-18+18) - (4)(12-12) = 0$, tenemos rango($A^*$) = 2, es decir

rango(A) = rango(A^*) = 2 < nº de incógnitas, luego e**l sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

b)

Resuélvelo para m = 3. Para dicho valor de m, calcula, si es posible, una solución en la que y = 0.

Hemos visto en el apartado anterior que si **m = 3**, rango(A) = rango(A^*) = 2 < nº de incógnitas, luego e**l sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

Como el rango es 2, tenemos 2 ecuaciones con 3 incógnitas. Tomamos las dos primeras, pues con ellas hemos formado el menor de orden dos distinto de cero.

$2x - 4y + 6z = 6$

$3y + 2z = 4$. Tomando $z = \lambda \in R$, tenemos $3y + 2\lambda = 4$, de donde $y = 4/3 - 2\lambda/3$. Entrando en la primera:

$2x + 4(4/3 - 2\lambda/3) + 6(\lambda) = 6 \rightarrow 2x + 26\lambda/3 - 16/3 = 6 \rightarrow x + 13\lambda/3 - 8/3 = 3 \rightarrow x = 17/3 - 13\lambda/3$

Solución $(x,y,z) = (17/3 - 13\lambda/3, 4/3 - 2\lambda/3, \lambda)$ con $\lambda \in R$.

Me piden ver si hay una solución en la que y = 0, es decir $y = 4/3 - 2\lambda/3 = 0$. Luego $\lambda = 2$, y la solución pedida es **$(x,y,z) = (17/3 - 13(2)/3, 0, (2)) = (-3,0,2)$.**

Ejercicio 4 opción B, modelo Septiembre 2013

Considera los puntos A(1,0,2), B(-1,3,1), C(2,1,2) y D(1,0,4).

a) [1 punto] Halla la ecuación del plano que contiene a A, B y C.

b) [1'5 puntos] Halla el punto simétrico de D respecto del plano x - y - 5z + 9 = 0.

Solución

Considera los puntos A(1,0,2), B(-1,3,1), C(2,1,2) y D(1,0,4).

a)

Halla la ecuación del plano que contiene a A, B y C.

Para la ecuación del plano necesitamos un punto, el A(1,0,2), y dos vectores independientes, el **AB** = (-2,3,-1) y **AC** = (1,1,0)

La ecuación vectorial del plano es $\pi \equiv (x,y,z) = \mathbf{OA} + \lambda\mathbf{AB} + \mu\mathbf{AC} = (1,0,2) + \lambda(-2,3,-1) + \mu(1,1,0)$, con $\lambda, \mu \in R$.

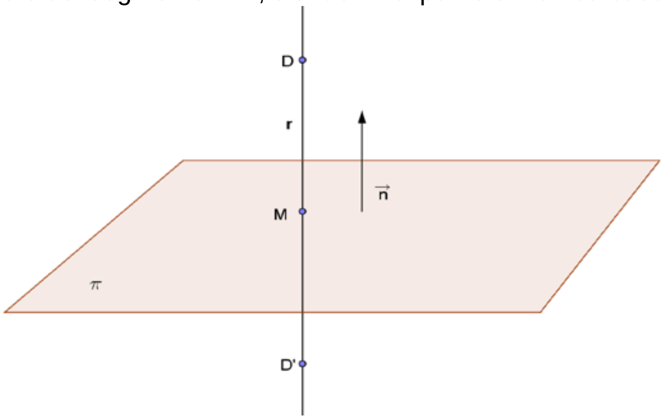
La ecuación general del plano es $\pi \equiv 0 = \det(\mathbf{AX}, \mathbf{AB}, \mathbf{AC}) = \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila =

$= (x-1)(-2) - y(-2) + (z-2)(1) = -2x + 2y + z = 0$.

b)

Halla el punto simétrico de D(1,0,4) respecto del plano x - y - 5z + 9 = 0.

Calculamos la recta “r” perpendicular al plano “π” (Nos sirve como vector director de la recta **u** el vector normal del plano **n**), que pasa por el punto D.
Calculamos el punto M intercesión de la recta “r” con el plano “π”.
El punto M es el punto medio del segmento DD’, siendo D’ el punto simétrico buscado.



Calculamos la recta “r”. Punto el D(1,0,4), vector director **u** = **n** = (1,-1,-5).
Ecuación de “r” en vectorial $r \equiv (x, y, z) = (1 + \lambda, 0 - \lambda, 4 - 5\lambda)$

Punto $M = r \cap \pi$ (punto de corte)
De $(1 + \lambda) - (- \lambda) - 5(4 - 5\lambda) + 9 = 0$, obtenemos $27\lambda = 10$, de donde $\lambda = 10/27$, y el punto M es $M(1 + (10/27), -(10/27), 4 - 5(10/27)) = M(37/27, -10/27, 58/27)$

El punto M(37/27, -10/27, 58/27) es el punto medio del segmento DD’, es decir
(37/27, -10/27, 58/27) = ((1+x)/2, (0+y)/2, (4+z)/2).
De 37/27 = (1+x)/2, tenemos x = 47/27.
De -10/27 = (0+y)/2, tenemos y = -20/27.
De 58/27 = (4+z)/2 , tenemos z = 8/37.

El punto simétrico pedido es D’(x, y, z) = D’(47/27,-20/27,8/27).