

## Opción A

### Ejercicio 1 opción A, modelo Junio 2014

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ .

a) [1'75 puntos] Halla  $a$ ,  $b$  y  $c$  para que la gráfica de  $f$  tenga un punto de inflexión de abscisa  $x = 1/2$  y que la recta tangente en el punto de abscisa  $x = 0$  tenga de ecuación  $y = 5 - 6x$ .

a) [0'75 puntos] Para  $a = 3$ ,  $b = -9$  y  $c = 8$ , calcula los extremos relativos de  $f$  (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

#### Solución

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ .

a)

Halla  $a$ ,  $b$  y  $c$  para que la gráfica de  $f$  tenga un punto de inflexión de abscisa  $x = 1/2$  y que la recta tangente en el punto de abscisa  $x = 0$  tenga de ecuación  $y = 5 - 6x$ .

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ . Esta función es polinómica por tanto continua, derivable e integrable las veces que sean necesarias, en  $\mathbb{R}$ .

Como tiene un punto de inflexión en  $x = 1/2$ , sabemos que  $f''(1/2) = 0$ .

Como la recta tangente en el punto de abscisa  $x = 0$  tiene de ecuación  $y = 5 - 6x$ , tenemos que  $f(0) = 5$ , porque en  $x = 0$  la ordenada  $f(0)$  y el valor  $y(0)$  de la recta tangente coinciden. Sabemos también que la pendiente de la recta tangente ( $y' = -6$ ) coincide con  $f'(0)$  (por la interpretación geométrica de la derivada en un punto), por tanto  $f'(0) = -6$ .

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ;  $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ ;  $f''(x) = 6x + 2a$ .

De  $f(0) = 5$ , tenemos  $5 = c$ , por tanto  $c = 5$

De  $f'(0) = -6$ , tenemos  $-6 = b$ , de donde  $b = -6$ .

De  $f''(1/2) = 0$ , tenemos  $0 = 6(1/2) + 2a$ , por tanto  $a = -3/2$ .

**La función pedida es  $f(x) = x^3 - 3x^2/2 - 6x + 5$ .**

a)

Para  $a = 3$ ,  $b = -9$  y  $c = 8$ , calcula los extremos relativos de  $f$  (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

Nuestra función es  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 8$ .

Estudiamos la monotonía, es decir su primera derivada  $f'(x)$ .

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 8$ ;  $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$ .

De  $f'(x) = 0$ , tenemos  $3x^2 + 6x - 9 = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$ , de donde  $x = -3$  y  $x = 1$  que serán los posibles extremos relativos.

Como  $f'(-4) = 3(-4)^2 + 6(-4) - 9 = 15 > 0$ ,  $f(x)$  es estrictamente creciente ( $\nearrow$ ) en  $(-\infty, -3)$ .

Como  $f'(0) = 3(0)^2 + 6(0) - 9 = -9 < 0$ ,  $f(x)$  es estrictamente decreciente ( $\searrow$ ) en  $(-3, 1)$ .

Como  $f'(2) = 3(2)^2 + 6(2) - 9 = 15 > 0$ ,  $f(x)$  es estrictamente creciente ( $\nearrow$ ) en  $(1, +\infty)$ .

Por definición en  $x = -3$  hay un máximo relativo que vale  $f(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 - 9(-3) + 8 = 35$ .

Por definición en  $x = 1$  hay un mínimo relativo que vale  $f(1) = (1)^3 + 3(1)^2 - 9(1) + 8 = 3$ .

### Ejercicio 2 opción A, modelo Junio 2014

Sean  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  las funciones definidas respectivamente por  $f(x) = |x|/2$  y  $g(x) = 1/(1 + x^2)$ .

a) [1 puntos] Esboza las gráficas de  $f$  y  $g$  sobre los mismos ejes y calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.

a) [1'5 puntos] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de  $f$  y  $g$ .

#### Solución

Sean  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  las funciones definidas respectivamente por  $f(x) = |x|/2$  y  $g(x) = 1/(1+x^2)$ .

a)

Esboza las gráficas de  $f$  y  $g$  sobre los mismos ejes y calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.

Recordamos que la gráfica del valor absoluto  $|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$  es la de **dos semirrectas**

**que coinciden en (0,0)** porque  $|x|$  es continua en  $\mathbb{R}$  por compuesta de continuas, **es**

**simétrica respecto al eje OY** porque  $|-x| = |x|$ , por tanto la gráfica de  $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$  es

muy parecida a la de  $|x|$  pero **pasa por los puntos (-1,1/2) y (1,1/2)**.

La gráfica de  $g(x) = 1/(1+x^2)$ , al ser una función racional podemos obtenerla calculando sus asíntotas y su corte con los ejes.

No tiene asíntotas verticales, porque ningún valor de "x" anula el denominador.

Vemos que  $g(0) = 1/(1+0^2) = 1$ , y que  $g(x) > 0$ . Como al aumentar el denominador disminuye el cociente, **el valor (0,1) el máximo relativo y absoluto** pues se alcanza para  $x = 0$ .

Como  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1/(1+x^2) = 1/(1+(\pm\infty)^2) = 1/+\infty = 0^+$ , **la recta  $y = 0$  es una asíntota horizontal de**

**g en  $\pm\infty$** , y además  $g$  está por encima de la asíntota horizontal  $y = 0$  en  $\pm\infty$ .

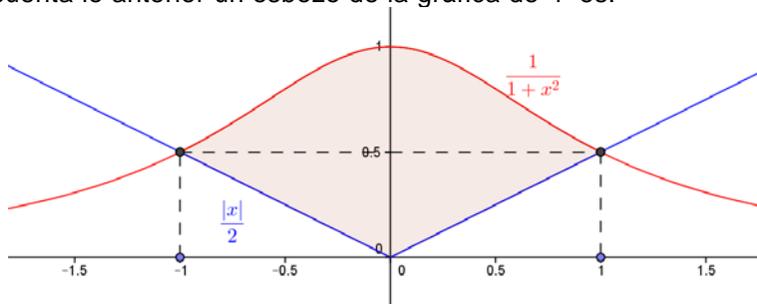
Como  $g(-x) = g(x)$ , **la gráfica de  $g$  es simétrica respecto al eje OY**.

Veamos los puntos de corte de  $f$  y  $g$ . Lo estudiamos sólo para  $x > 0$ , por simetría.

De  $f(x) = g(x)$ , tenemos ( $x > 0$ )  $x/2 = 1/(1+x^2) \rightarrow x(1+x^2) = 2 \rightarrow x+x^3 = 2 \rightarrow x^3+x-2 = 0$ .

Vemos que  $x = 1$  es solución, porque  $(1)^3 + 1 - 2 = 0$ . Y ya no hay mas cortes entre las gráficas para  $x > 0$ , luego los punto de corte son  $(-1,1/2)$  y  $(1,1/2)$ .

Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de la gráfica de  $f$  es:



a)

Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de  $f$  y  $g$ .

Para calcular el área observando la figura vemos que es simétrica respecto al eje OY, luego:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= 2 \cdot \int_0^1 (1/(1+x^2) - x/2) dx = 2 \cdot [\text{artag}(x) - x^2/4]_0^1 = \\ &= 2 \cdot (\text{artag}(1) - 1/4 - \text{artag}(0)) = 2 \cdot (\pi/4 - 1/4 - 0) = \pi/2 - 1/2 \cong 1'0708 \text{ u}^2. \end{aligned}$$

Si no te das cuenta que es simétrica tienes que calcular el área como suma de dos integrales:

$$\text{Área} = \int_{-1}^0 (1/(1+x^2) - (-x/2)) dx + \int_0^1 (1/(1+x^2) - x/2) dx \text{ y se obtiene el mismo resultado.}$$

### Ejercicio 3 opción A, modelo Junio 2014

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$x + 2y - 3z = 3$$

$$2x + 3y + z = 5$$

a) [1'5 puntos] Calcula  $\alpha$  de manera que al añadir una tercera ecuación de la forma  $\alpha x + y - 7z = 1$  el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el original.

b) [1 punto] Calcula las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea 4.

### Solución

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$x + 2y - 3z = 3$$

$$2x + 3y + z = 5$$

a)

Calcula  $\alpha$  de manera que al añadir una tercera ecuación de la forma  $\alpha x + y - 7z = 1$  el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el original.

Observamos que **el sistema**  $\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x + 3y + z = 5 \end{cases}$  tiene dos ecuaciones y tres incógnitas, y al nos

ser los coeficientes de las incógnitas proporcionales (podemos reducir por Gauus, o bien obtener un menor de orden 2 distinto de cero) **tiene de rango 2**, por tanto es un sistema compatible e indeterminado con infinitas soluciones.

Si le añadimos la ecuación  $\alpha x + y - 7z = 1$  al sistema  $\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x + 3y + z = 5 \end{cases}$ , **para que tenga las**

**mismas soluciones que el original la matriz de las coeficientes A del nuevo sistema**

$\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x + 3y + z = 5 \\ \alpha x + y - 7z = 1 \end{cases}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ \alpha & 1 & -7 \end{pmatrix}$  **tiene que tener rango 2**, para lo cual **su determinante**

**det(A) tiene que ser cero.**

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ \alpha & 1 & -7 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{array} = (1)(-21-1) - (2)(-14-\alpha) + (-3)(2-3\alpha) = -22 + 28 + 2\alpha - 6 + 9\alpha = 0 =$$

$= 0 + 11\alpha = 0$ , **de donde  $\alpha = 0$ , para que ambos sistemas ténganlas mismas soluciones.**

b)

Calcula las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea 4.

El sistema que me piden resolver es  $\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x + 3y + z = 5 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$ . Lo haremos por Gauss. También se

puede resolver por Cramer.

Su matriz asociada es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ F_3 - F_2 \end{array} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \text{ por tanto nuestro sistema}$$

$$\text{asociado es } \begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ -y + 7z = -1 \\ -3z = 2 \end{cases}, \text{ de donde } \mathbf{z = -2/3}.$$

De  $-y + 7(-2/3) = -1$ , tenemos  $\mathbf{y = 1 - 14/3 = -11/3}$ .

De  $x + 2(-11/3) - 3(-2/3) = 3$ , tenemos  $\mathbf{x = 3 + 22/3 - 2 = 25/3}$ .

La solución es  $(x,y,z) = (25/3, -11/3, -2/3)$ , y es un sistema compatible y determinado con solución única.

#### Ejercicio 4 opción A, modelo Junio 2014

Considera la recta  $r$  que pasa por los puntos  $A(1,0,-1)$  y  $B(-1,1,0)$ .

(a) [1 punto] Halla la ecuación de la recta  $s$  paralela a  $r$  que pase por  $C(-2,3,2)$ .

(b) [1'5 puntos] Calcula la distancia entre  $r$  y  $s$ .

#### Solución

Considera la recta  $r$  que pasa por los puntos  $A(1,0,-1)$  y  $B(-1,1,0)$ .

(a)

Halla la ecuación de la recta  $s$  paralela a  $r$  que pase por  $C(-2,3,2)$ .

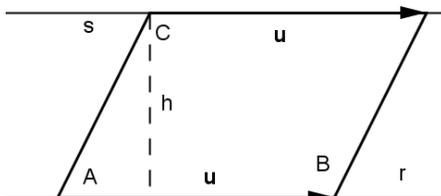
Para la recta  $s$  tengo el punto  $C(-2,3,2)$ , y como las rectas son paralelas me sirve como vector director de  $s$  el de la recta  $r$ , es decir el  $\mathbf{u} = \mathbf{AB} = (-2,1,1)$ .

La recta  $s$  en forma paramétrica es :  $s \equiv \begin{cases} x = -2 - 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$ , con  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

(b)

Calcula la distancia entre  $r$  y  $s$ .

Como ya sabemos que las rectas son paralelas, vamos a calcular la distancia entre ellas como el área de un paralelogramo. *Es la altura del paralelogramo*



Dada la recta "r" conocemos el punto A y el vector  $\mathbf{u}$ . De la recta "s" sólo tomamos el punto C

El área del paralelogramo determinado por los vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{AC}$  es  $\|\mathbf{AC} \times \mathbf{u}\| = \text{base} \cdot \text{altura} =$

$= \|\mathbf{u}\| \cdot h$ , pero la altura "h" es  $d(s,r) = d(C;r)$ , luego  $d(C;r) = (\|\mathbf{AC} \times \mathbf{u}\|) / (\|\mathbf{u}\|)$

De "r", punto el  $A(1,0,-1)$  y vector, el  $\mathbf{u} = (-2,1,1)$ .

De "s", punto el  $C(-2,3,2)$ .

$$\mathbf{AC} = (-3, 3, 3); \mathbf{AC} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(0) - \vec{j}(3) + \vec{k}(3) = (0, 3, 3); \|\mathbf{AC} \times \mathbf{u}\| = \sqrt{(0^2 + 3^2 + 3^2)} = 3 \cdot \sqrt{2}$$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(2^2 + 1^2 + 1^2)} = \sqrt{6}$$

$$\text{Luego } d(s,r) = d(C;r) = (\|\mathbf{AC} \times \mathbf{u}\|) / (\|\mathbf{u}\|) = 3 \cdot (\sqrt{2}) / (\sqrt{6}) = 3 \cdot \sqrt{(1/3)} = \sqrt{3} \text{ u.l.}$$

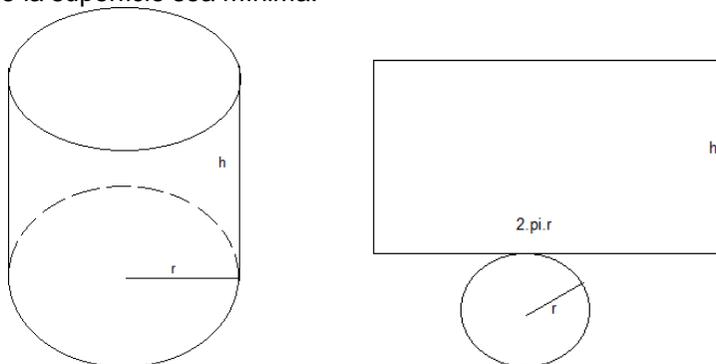
### Opción B

#### Ejercicio 1 opción B, modelo Junio 2014

[2'5 puntos] Se desea construir un depósito en forma de cilindro recto, con base circular y sin tapadera, que tenga una capacidad de  $125 \text{ m}^3$ . Halla el radio de la base y la altura que debe tener el depósito para que la superficie sea mínima..

**Solución**

Se desea construir un depósito en forma de cilindro recto, con base circular y sin tapadera, que tenga una capacidad de  $125 \text{ m}^3$ . Halla el radio de la base y la altura que debe tener el depósito para que la superficie sea mínima.



Función a minimizar: Superficie =  $S = \text{área rectángulo} + \text{área base} = (2\pi r) \cdot h + \pi r^2$ .

Relación entre las variables: Capacidad = Volumen =  $125 = (\pi r^2) \cdot h$ , de donde  $h = \frac{125}{\pi r^2}$ .

Función a minimizar  $S(r) = (2\pi r) \cdot \frac{125}{\pi r^2} + \pi r^2 = \frac{250}{r} + \pi r^2$ .

Si  $S'(a) = 0$  y  $S''(a) > 0$ ,  $x = a$  es un mínimo de  $S(r)$

$S'(r) = \frac{-250}{r^2} + 2\pi r$ . De  $S'(r) = 0$ , tenemos  $\frac{-250}{r^2} + 2\pi r = 0$ , es decir  $2\pi r = \frac{250}{r^2}$ , de donde

tenemos  $2\pi r^3 = 250$ , y  $r = \sqrt[3]{\frac{250}{2\pi}} = \frac{5}{\sqrt[3]{\pi}}$  m.  $\cong 3'414$  m.

Las dimensiones del depósito son radio  $r = \frac{5}{\sqrt[3]{\pi}}$  m. y  $h = \frac{125}{\pi \left(\frac{5}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2} = \frac{5\sqrt[3]{\pi^2}}{\pi} \text{ m} = \frac{5}{\sqrt[3]{\pi}} \cong$

$\cong 3'414$  m. Observamos que el radio y la altura son iguales.

Veamos que  $r = \frac{5}{\sqrt[3]{\pi}}$  es un mínimo, viendo que  $S''\left(\frac{5}{\sqrt[3]{\pi}}\right) > 0$

De  $S'(r) = \frac{-250}{r^2} + 2\pi r = -250 \cdot r^{-2} + 2\pi r$ , tenemos  $S''(r) = -250 \cdot (-2) \cdot r^{-3} + 2\pi = \frac{500}{r^3} + 2\pi$ , por

tanto sustituyendo  $S''\left(\frac{5}{\sqrt[3]{\pi}}\right) = \frac{500}{\left(\frac{5}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^3} + 2\pi = 4\pi + 2\pi = 6\pi > 0$ , luego es un mínimo.

**Ejercicio 2 opción B, modelo Junio 2014**

[2'5 puntos] Sea la función definida por  $f(x) = x \cdot \ln(x + 1)$  para  $x > -1$  (ln denota el logaritmo neperiano). Determina la primitiva de  $f$  cuya gráfica pasa por el punto  $(1,0)$ .

**Solución**

Una primitiva de  $f(x) = x \cdot \ln(x + 1)$  es  $F(x) = I = \int x \cdot \ln(x + 1) dx = \{ \text{Integral por partes por partes} \}$

$\int u dv = uv - \int v du$ . En nuestro caso  $u = \ln(x + 1)$  y  $dv = x \cdot dx$ , de donde  $du = \frac{dx}{1+x}$  y  $v = \int dv =$

$\int x \cdot dx = x^2/2$  }  $= (x^2/2) \cdot \ln(x + 1) - \int \frac{x^2 dx}{2(1+x)} = (x^2/2) \cdot \ln(x + 1) - I_1$

$I_1 = \int \frac{x^2 dx}{2(1+x)} = \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{(1+x)}$ , que es una integral racional, pero como el numerador es de grado mayor que el denominador tenemos que efectuar antes la división entera.

$$\begin{array}{r} x^2 \\ -x^2 - x \\ \hline x + 1 \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} x + 1 \\ x - 1 \end{array}$$

$$I_1 = (1/2) \cdot \int ((Cx) + R(x))/(d(x)) dx = (1/2) \cdot \int (x-1) dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} = (1/2) \cdot (x^2/2 - x) + (1/2) \cdot \ln(x+1),$$

$$\text{luego } F(x) = I = (x^2/2) \cdot \ln(x+1) - I_1 = (x^2/2) \cdot \ln(x+1) - (1/2) \cdot (x^2/2 - x) - (1/2) \cdot \ln(x+1) + K = \\ = (x^2/2 - 1/2) \cdot \ln(x+1) - (1/2) \cdot (x^2/2 - x) + K.$$

Como pasa por (1,0),  $F(1) = 0 \rightarrow (1/2 - 1/2) \cdot \ln(1+1) - (1/2) \cdot (1/2 - 1) + K = 0 = 1/4 + K = 0$ , de donde  $K = -1/4$  y la primitiva pedida es  $F(x) = (x^2/2 - 1/2) \cdot \ln(x+1) - (1/2) \cdot (x^2/2 - x) - 1/4$ .

### Ejercicio 3 opción B, modelo Junio 2014

[2'5 puntos] Considera las matrices  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ . Determina, si existe,

la matriz  $X$  que verifica  $A \cdot X + B = A^2$

#### Solución

Considera las matrices  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ . Determina, si existe, la matriz  $X$

que verifica  $A \cdot X + B = A^2$ .

La matriz  $A$  tiene matriz inversa  $A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^t)$ , si su determinante  $\det(A) = |A|$  es distinto de cero.

Como  $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$  Adjuntos  
tercera =  $1(0-1) = -1 \neq 0$ , la matriz  $A$  tiene matriz inversa  $A^{-1}$ .  
fila

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^t) = (1/-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De  $A \cdot X + B = A^2$ , tenemos  $A \cdot X = A^2 - B$ . Como existe  $A^{-1}$  multiplicamos por la izquierda la expresión  $A \cdot X = A^2 - B$ .

$$A^{-1} A X = A^{-1} A^2 - A^{-1} B \rightarrow I \cdot X = I \cdot A - A^{-1} \cdot B \rightarrow X = A - A^{-1} \cdot B$$

$$\text{Luego } X = A - A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

### Ejercicio 4 opción B, modelo Junio 2014

Sea  $r$  la recta definida por  $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$

(a) [1'5 puntos] Determina la ecuación general del plano que contiene a  $r$  y pasa por el origen de coordenadas..

(b) [1 punto] Halla las ecuaciones paramétricas del plano que corta perpendicularmente a  $r$  en el punto  $(1,1,0)$ .

### Solución

Sea  $r$  la recta definida por  $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$  o  $\begin{cases} x + 2y - z - 3 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$

(a)

Determina la ecuación general del plano que contiene a  $r$  y pasa por el origen de coordenadas.

Una de las maneras de resolverlo es calcular el haz de planos que determina la recta  $r$  (pues me la han dado en forma implícita) y sustituir el punto por donde pasa el plano.

Haz de planos  $(x + 2y - z - 3) + \lambda(2x - y + z - 1) = 0$ . Sustituimos el origen  $(0,0,0)$  y nos queda  $(0 - 3) + \lambda(0 - 1) = 0$ , de donde  $\lambda = -3$ , y **el plano pedido es:**

$$(x + 2y - z - 3) + (-3)(2x - y + z - 1) = 0 = -5x + 5y - 4z = 0$$

(b)

Halla las ecuaciones paramétricas del plano que corta perpendicularmente a  $r$  en el punto  $P(1,1,0)$ .

Como el plano  $\pi$  es perpendicular a la recta " $r$ " tiene como vector normal  $\mathbf{n}$  el vector director de la recta  $r$ , el  $\mathbf{v}$ .

Un vector director  $\mathbf{v}$  lo sacamos como producto vectorial ( $\times$ ) de los vectores normales que determinan dicha recta.

$$\mathbf{v} = (1,2,-1) \times (2,-1,1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(1) - \mathbf{j}(3) + \mathbf{k}(-5) = (1,-3,-5) = \mathbf{n}.$$

Si nos damos cuenta el vector normal se obtiene de los vectores independientes  $(1,2,-1)$  y  $(2,-1,1)$ , que son los vectores normales de los planos que determinan la recta.

Para poner la ecuación paramétrica del plano necesitamos un punto, el  $P(1,1,0)$  y dos vectores independientes el  $(1,2,-1)$  y  $(2,-1,1)$ .

Las ecuaciones paramétricas del plano son:  $\begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = 1 + 2\lambda - \mu \\ z = 0 - \lambda + \mu \end{cases}$ , con  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  y  $(x,y,z)$  un punto

genérico del plano.