Ejercicio nº 2 de la opción A del modelo 4 del libro 96_97

Sea f ' la función derivada de una función derivable f : R ⟶ R . Se sabe que es f ' es continua y que
(i) f '(0) = 0, f '(2) = 1, f '(3) = 0, f '(4) = -1, f '(5) = 0;
(ii) f ' es estrictamente creciente en los intervalos (- ∞ , 2) y (4, + ∞);
(iii) f ' es estrictamente decreciente en el intervalo (2,4);
(iv) la recta de ecuación y = 2x + 3 es una asíntota oblicua de f ' cuando x ⟶ + ∞ .
(1) [1'25 puntos]. Esboza la gráfica de f '.
(2) [1'25 puntos]. ¿En qué valores de x alcanza f sus máximos y mínimos relativos?

Solución

(2)

Los posibles máximos y mínimos relativos son los valores que hacen f '(x) = 0. En nuestro caso son x = 0, x = 3 y x = 5.

Estudiamos el valor de la segunda derivada en dichos puntos para ver que es

Como f ' es estrictamente creciente en el intervalo (- ∞ , 2) y ser f ' continua tenemos f ''(- ∞ , 2) > 0, luego f es convexa en (- ∞ , 2) y en particular como f ''(0) > 0 , x = 0 es un mínimo

Como f ' es estrictamente decreciente en el intervalo (2 , 4) y ser f ' continua tenemos tenemos f ''(2,4) < 0, luego f es cóncava en (2,4) y en particular como que f ''(3) < 0 , x = 3 es un máximo

Como f ' es estrictamente creciente en el intervalo (4, + ∞) y ser f ' continua tenemos tenemos f ''(4, +∞) > 0, luego f es convexa en (4, + ∞) y en particular como que f ''(5) > 0 , x = 5 es un mínimo

Además x = 2 y x = 4 son puntos de inflexión de f(x)

(1)

De f '(0) = f '(3) = f '(5) = 0; f' tiene en el numerador los factores x(x-3)(x-5)

Como y = 2x + 3 = mx + n, es una asíntota oblicua con m = 2 = $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x}$ y n = 3 = $\lim_{x\to\infty}\left(f'(x) - mx\right)$ =

= $\lim_{x\to\infty}\left(f'(x) - 2x\right)$, la función f' es un cociente de funciones polinómicas con el numerador un grado más que el denominador, luego f' es de la forma: $f'(x) = \frac{k(x)(x-3)(x-5)}{ax^2+bx+c}$

De f '(2) = 1, tenemos $1 = \frac{k(2)(-1)(-3)}{4a+2b+c}$, es decir 4a+2b + c = 6k.

De f '(4) = -1, tenemos $-1 = \frac{k(4)(1)(-1)}{16a+4b+c}$, es decir 16a+4b + c = 4k.

De m = 2 = $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x}$, tenemos 2 = $\lim_{x\to\infty}\frac{k(x)(x-3)(x-5)}{ax^3+bx^2+cx} = \lim_{x\to\infty}\frac{kx^3}{ax^3}$ = k/a, es decir k = 2a.

De n = 3 = $\lim_{x\to\infty}\left(f'(x) - 2x\right)$, tenemos 3 = $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{k(x)(x-3)(x-5)}{ax^2+bx+c} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{-16ax^2 - 2bx^2}{ax^2}$ = (-16a-2b)/a, es decir -19a = 2b.

El sistema

4a+2b + c = 6k.
16a+4b + c = 4k.
k = 2a
-19a = 2b

Tiene infinitas soluciones, una de ellas es:

Tomo a = 1, de donde k = 2, b = -19/2 y c = 57, luego una de las posibles funciones f' es

$$f'(x) = \frac{2(x)(x-3)(x-5)}{x^2-(19/2)x+57}$$

La gráfica de esta función f' puede ser parecida a esta (la asíntota oblicua está en rojo)