

Análisis de paradojas en el aula de matemáticas con ayuda de Geogebra

López Centella, Esperanza ¹ esperanza@ugr.es

Resumen

El presente trabajo consiste en una propuesta didáctica basada en paradojas matemáticas, diseñada con ayuda de Geogebra, para implementar con estudiantes de educación secundaria y bachillerato haciendo uso de este software. Enfatizamos el papel de las paradojas como recurso didáctico para la enseñanza de contenidos y la promoción de competencias matemáticas. Las actividades y orientaciones metodológicas, junto con sus correspondientes hojas de trabajo en Geogebra —objeto de presentación en la comunicación en el encuentro—, están basadas en una serie de paradojas matemáticas, algunas de las cuales presentamos aquí. Estas involucran conocimientos y prácticas de los distintos bloques que distingue el currículo de las asignaturas de matemáticas en el sistema educativo español en estas etapas educativas, a saber: Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas, Números y Álgebra, Geometría, Funciones, y Estadística y Probabilidad (MEC, 2014).

1. Introducción

Tal y como apuntan Peña y Ausín (2011), “en el habla cotidiana, un hecho se considera paradójico cuando resulta contrario a las expectativas razonables, rompiendo alguna regularidad real o presunta”. En efecto, el término paradoja proviene etimológicamente de la palabra del latín *paradoxa* (que a su vez procede del griego, *παράδοξα*) y significa propiamente “lo contrario a la opinión común”. En su libro *¡Ajá! Paradojas que hacen pensar*, Martin Gardner (1982) incluye cuatro tipos de paradojas: “(1) afirmaciones que parecen falsas, aunque en realidad son verdaderas; (2) afirmaciones que parecen verdaderas, pero que en realidad son falsas; (3) cadenas de razonamiento aparentemente impecables, que conducen sin embargo a contradicciones lógicas (falacias); (4) declaraciones cuya verdad o falsedad es indecidible.” (p. 7).

Como se pone de relieve en estas definiciones e interpretaciones de la noción de paradoja, la propia naturaleza de las paradojas permite evidenciar limitaciones en la intuición, el lenguaje, los conceptos y el entendimiento humanos. Por este mismo motivo, la identificación y el trabajo de paradojas basadas en conceptos aparentemente simples ha impulsado importantes

¹ Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada (Granada, España).

avances en la ciencia, la filosofía y las matemáticas. En este sentido, el psicólogo matemático Anatol Rapoport (1967) afirma lo siguiente:

“Las paradojas han tenido un papel crucial en la historia intelectual, a menudo presentado los desarrollos revolucionarios de las ciencias, de las matemáticas y de la lógica. Cada vez que, en cualquier disciplina, aparece un problema que no puede resolverse en el interior del cuadro conceptual susceptible de aplicarse, experimentamos un choque, choque que puede constreñirnos a rechazar la antigua estructura inadecuada y a adoptar una nueva. Es a este proceso de mutación intelectual al que se le debe el nacimiento de la mayor parte de las ideas matemáticas y científicas.” (pp. 50-56).

Debido a estas características, no son pocos los expertos que, a nivel internacional, destacan el interés de las paradojas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Por su parte, Falk y Konold (1992) afirman que el análisis de paradojas requiere, a quien las analiza, una conciencia de sus propios pensamientos y preconcepciones, lo que resulta tan relevante como el aprendizaje de la solución correcta y un ejercicio crucial para el desarrollo de la capacidad matemática de abstracción. Konold (1994) destaca el efecto del uso de las paradojas sobre la motivación de los estudiantes: la obtención de resultados sorprendentes en la resolución de paradojas anima a los estudiantes a explorar el problema más formalmente. Por su lado, Lesser (1998) declara que el uso inteligente de paradojas en el aula favorece una pedagogía constructivista, fomentando un aprendizaje profundo de los contenidos y técnicas de razonamiento implicadas a partir de las creencias previas, y otorgando el papel de facilitadora del aprendizaje a la persona instructora en el aula.

En la comunicación que se propone para el VII Encuentro en Adalucía “Geogebra en el aula” se presenta una propuesta didáctica para estudiantado de educación secundaria y bachillerato basada en la exploración de un conjunto de paradojas por medio del uso de Geogebra. Estas paradojas se enmarcan en contextos geométricos, probabilísticos, algebraicos y de medida. Sobre cada una de ellas, se discuten el lenguaje matemático, los conceptos, las propiedades, los procedimientos y los argumentos involucrados en su tratamiento (Godino, Font y Wilhelmi, 2008), y se plantean actividades para ser trabajadas en el aula acompañadas de su correspondiente hoja de trabajo en Geogebra.

2. Paradojas implicadas en el diseño de la propuesta

A continuación se exponen brevemente algunas de las paradojas en las que se basa la propuesta didáctica dirigida a estudiantado de educación secundaria y bachillerato.

Paradoja de Bertrand. Esta es un problema dentro de la interpretación clásica de la teoría de la probabilidad. Consideremos un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia. Elijamos

aleatoriamente una cuerda de la circunferencia. ¿Cuál es la probabilidad de que la longitud de la cuerda sea mayor que la de un lado del triángulo?

Bertrand dio tres argumentos, aparentemente válidos, con diferentes resultados. Un argumento está basado en la elección de puntos aleatorios en la circunferencia como extremos de la cuerda (probabilidad de $1/3$). Otro, en la elección de un radio de la circunferencia y un punto del radio, construyendo la cuerda perpendicular que pasa por dicho punto (probabilidad de $1/2$). Un tercer método considera la elección de un punto cualquiera del círculo y la construcción de la cuerda que tiene a dicho punto como punto medio (probabilidad de $1/4$; ver Figura 1).

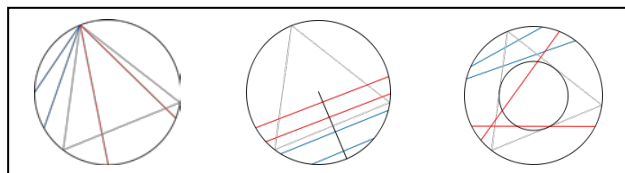


Figura 1. Representación pictórica de argumentos empleados en la paradoja de Bertrand.

Fuente de la imagen: Wikipedia

Paradoja de la banda esférica. Consideremos dos esferas de radio significativamente diferentes. Por ejemplo, una esfera del tamaño de nuestro planeta y una canica. Ambas esferas están rodeadas con una cuerda por su ecuador (ver Figura 2). Supongamos que aumentamos un metro la longitud de cada una de las cuerdas, rodeando cada esfera con su cuerda de tal forma que la distancia entre ambas se mantenga a lo largo de la esfera. En el caso de la esfera enorme, ¿podríamos pasar un lápiz (de unos 10 cm de longitud) por el hueco generado? ¿Y en el de la esfera diminuta? ¿Podríamos deslizar por el hueco una botella (25 cm) en cada caso?



Figura 2. Ilustración del contexto de la paradoja de la banda esférica

Paradoja de Hooper (o del cuadrado perdido o de rompecabezas). Consiste en una ilusión óptica basada en el área de una serie de figuras geométricas. Como en la mayoría de paradojas, existen múltiples variantes. La Figura 3 presenta una de ellas. En ella se observa lo que parecen dos triángulos de igual área y forma, compuestos de una serie de figuras

geométricas ubicadas en distintas posiciones. Estas figuras son las mismas en ambos casos con una salvedad: en uno de los triángulos hay, adicionalmente, un cuadrado.

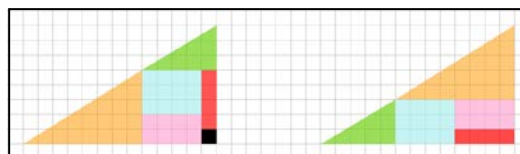


Figura 3. Representación pictórica de la paradoja del cuadrado perdido

Paradoja de Monty Hall. La formulación más conocida de esta paradoja se contextualiza en un concurso televisivo. Hay tres puertas: tras dos de ellas hay una cabra y tras la otra un coche (o algún otro premio, ver Figura 4). El concursante se supone interesado en ganar el coche y para ello ha de elegir una de las puertas. Tras su elección, se abre una de las otras puertas no elegidas, mostrándose una cabra. Al concursante se le ofrece ahora la posibilidad de mantener su elección de puerta inicial o cambiarla. ¿Repercute un cambio de puerta en su probabilidad de ganar el coche?



Figura 4. Ilustración del contexto de la paradoja de Monty Hall

Paradoja de la moneda que gira. Esta paradoja resulta a partir de la observación a priori no intuitiva de que, cuando una moneda gira alrededor y en contacto del perímetro de otra moneda de igual tamaño que ocupa una posición fija (ver Figura 5), la moneda giratoria completa una rotación entera tras moverse hasta la mitad de la moneda estacionaria.



Figura 5. Ilustración del contexto de la paradoja de la moneda que gira

3. Material de apoyo

El material preciso para el desarrollo de la comunicación es un proyector, una pantalla de proyección y un ordenador con Geogebra instalado y/o acceso a Internet (prescindible si se cuenta con un cable con entrada micro HDMI que permita conectar mi propio ordenador portátil a la pantalla de proyección).

4. Conclusiones

Es la propia esencia de las paradojas lo que las convierte en un excelente recurso didáctico en el aula de matemáticas de las etapas educativas presentadas. Estas promueven la confrontación, invitan al desafío intelectual, la revisión conceptual, el cuestionamiento y la reflexión, despiertan el interés y la curiosidad; y la gran variedad de ellas permite trabajar muchos de los contenidos de los bloques de matemáticas incluidos en el currículo.

Referencias

Falk, R. y Konold, C. (1992). The psychology of learning probability. En F. Gordon y S. Gordon (eds.), *Statistics for the twenty-first century*, MAA Notes 26 (pp. 151-164). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Gardner, M. (1982). *¡Ajá! Paradojas que hacen pensar*, RBA divulgación.

Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R., (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico, *Publicaciones*, 38, 25-48.

Konold, C. (1994). Teaching probability through modeling real problems. *The Mathematics Teacher*, 87(4), 232-235.

Lesser, L. (1998). Countering indifference – Using counterintuitive examples. *Teaching Statistics*, 20(1), 10-12.

MEC (2014). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Disposición 37 del BOE núm. 3 de 2015, Sec. I, p. 169.

Peña, L. y Ausín, T. (2011). *Entrada del Compendio de lógica, argumentación y retórica*, Ed. por Luis Vega y Paula Olmos. Madrid: Trotta, ISBN 978-84-9879-191-4 (pp. 442-444).

Rapoport, A. (1967). Escape from paradox, *Scientific American*, 217 (pp. 50-56).